

# ОБОБЩЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В МУЛЬТИГРАВИТАЦИИ\*

С. А. Дуплий,

физико-технический факультет,  
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина,

А. Т. Котвицкий,

физический факультет,  
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина

7 августа 2018 г.

## Аннотация

Рассматривается общий подход к описанию взаимодействия моделей мультигравитации в  $D$ -мерном пространстве-времени. Приведены различные возможности для обобщения инвариантного объема. Далее конструируется наиболее общий вид потенциала взаимодействия, который в случае бигравитации переходит в модель типа Паули-Фирца. Подробный анализ данной модели, проведенный в формализме  $3+1$  разложения, а также требование отсутствия духов, приводят к тому, что данная бигравитационная модель в пределе слабого поля полностью эквивалентна модели Паули-Фирца. Таким образом, на конкретном примере показано, что введение взаимодействия между метриками эквивалентно введению массы у гравитона.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** мультигравитация, бигравитация, массивная гравитация, инвариантный объем, потенциал взаимодействия, модель Паули-Фирца

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Мультигравитация, наряду с конформной гравитацией [1] и скалярными теориями [2], является одним из возможных расширений общей теории относительности [3, 4]. В первых работах частный случай мультигравитации (бигравитация) называлась “ $f$ - $g$  theory” или “strong gravity” [5, 6, 7]). В дальнейшем эта конструкция успешно применялась в квантовой гравитации и бранах [8, 9, 10], теориях с дискретными размерностями [11, 12], теории перенормировок [13], массивной гравитации [14], а также в объяснении таких экспериментальных фактов, как темная энергия и материя, [15, 16, 17], ускоренное расширение вселенной [18, 19]. Поэтому важным является рассмотрение нелинейных формулировок мультигравитации (для бигравитации это рассматривалось в [20]).

С другой стороны, в теории массивной гравитации прогресс был связан с работами [21], где было продемонстрировано расширение массового слагаемого Паули-Фирца для линейризованной теории гравитации и показано, что в такой модели нет духовых мод [22]. Далее теория была расширена на общую дополнительную метрику [23]. Основные свойства подобных теорий были рассмотрены в работах [24, 25], а в [26] было проведено доказательство отсутствия духовых слагаемых в нелинейных моделях. В теориях гравитации с ненулевой массой существует особенность, которая проявляется в том, что при стремлении массы гравитона к нулю теория не переходит в ОТО [27, 28]. Механизм Вайнштейна [29] позволяет избежать такой неоднородности в пространстве параметров [23, 30], и, кроме того, такая неоднородность может устраняться в случае неплоской фоновой метрики [31, 32].

В данной работе мы рассматриваем общий подход к описанию взаимодействия моделей мультигравитации в  $D$  мерном пространстве-времени. В первой части изучаются различные возможности для

---

\*Принято в ТМФ.

обобщения инвариантного объема  $d\Omega_{int}^{(N)}$ , на который накладываются ограничения состоящие в том, что  $d\Omega_{int}^{(N)}$  должен быть скаляром, в пределе совпадения всех метрик инвариантный объем должен переходить в стандартный  $\sqrt{g}d^Dx$ . Также функция  $d\Omega_{int}^{(N)}$  должна быть монотонной и однородной по всем метрикам  $g_i$ . В следующем разделе мы конструируем наиболее общий вид потенциала взаимодействия. И показываем, что в самом простом случае двух метрик (бигравитации) он переходит в модель типа Паули-Фирца. Подробный анализ данной модели, проведенный в формализме 3+1 разложении и требование отсутствия духов приводит к тому, что данная бигравитационная модель в пределе слабого поля полностью эквивалентна модели Паули-Фирца. Фактически это означает, что введение взаимодействия между тензорными полями  $g_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $g_{\mu\nu}^{(2)}$  может быть эквивалентно введению массы у гравитона.

В приложении мы приводим новый способ вычисления  $\sqrt{g}$  для случая малых поправок, который является пригодным для любой фоновой метрики. В случае плоского фонового пространства-времени Минковского получается стандартное выражение.

## 2 МУЛЬТИГРАВИТАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ОБЪЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим совокупность  $N$  различных вселенных, каждая из которых описывается метрикой  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ , где  $i = 1, \dots, N$ . В  $D$ -мерном пространстве-времени мы используем сигнатуру  $\left(+, \overbrace{-, \dots, -}^{D-1}\right)$ . Для  $i$ -той вселенной действие запишем в виде

$$S_{G^{(i)}} = \int d\Omega^{(i)} \left[ L_{gr}^{(i)}(\mathbf{g}^{(i)}) + L_{mat}(\mathbf{g}^{(i)}, \Phi^{(i)}) \right], \quad (2.1)$$

где  $d\Omega^{(i)} = d^4x \sqrt{g^{(i)}}$ ,  $g^{(i)} = \left| \det(\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}) \right|$  — инвариантный объем,  $g^{(i)}$  — скалярная плотность веса 2 и  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$  — метрический тензор в  $i$ -той вселенной,  $L_{gr}^{(i)}(\mathbf{g}^{(i)})$  — лагранжиан, описывающий гравитационное поле,  $L_{mat}(\mathbf{g}^{(i)}, \Phi^{(i)})$  описывает взаимодействие гравитации и материальных полей  $\Phi^{(i)}$ . При этом, интегрирование в (2.1) ведется по общему многообразию для  $N$  вселенных.

В предположении “слабо связанных миров” [20] и “no-go” теоремы [33] общее действие для  $N$  безмассовых гравитонов записывается в виде суммы чисто гравитационных действий (2.1)

$$S_0 = \sum_{i=1}^N S_{G^{(i)}}. \quad (2.2)$$

В предположении, что “слабо связанные миры” взаимодействуют только за счет гравитационных полей, полное действие мультигравитации можно записать в виде суммы

$$S_{full} = \sum_i^N S_{G^{(i)}} + S_{int}, \quad (2.3)$$

где последнее слагаемое  $S_{int}$  описывает взаимодействие вселенных. Выбор этого слагаемого является ключевым при описании моделей мультигравитации [34].

В общем случае  $D$  измерений для  $N$ -гравитации  $S_{int}$  можно представить как

$$S_{int} = \int d^Dx W(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}), \quad (2.4)$$

где  $d^Dx$  и  $W(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$  — скалярные плотности противоположных весов. По аналогии со стандартным инвариантным объемом  $d\Omega = d^4x \sqrt{g}$  в общей теории относительности [3, 4], представим выражение  $d^Dx W(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$  как произведение

$$d^Dx \cdot f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}) \cdot V(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}), \quad (2.5)$$

где  $V(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}) (\equiv V(\mathbf{g}^{(i)}))$  — скалярный потенциал взаимодействия и  $f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$  — гладкая положительная функция с весом  $-1$  имеющая  $N$  положительных (действительных) аргументов.

Введем инвариантный объем взаимодействия

$$d\Omega_{int}^{(N)} = d^D x f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}), \quad (2.6)$$

который должен быть скаляром. Кроме того, в пределе совпадения [34]  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(1)} = \dots = \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(N)} \equiv \mathbf{g}_{\mu\nu}$  инвариантный объем взаимодействия должен переходить в стандартный инвариантный объем  $d\Omega_{int}^{(N)} \rightarrow d\Omega$ . Для того чтобы удовлетворить всем вышеперечисленным требованиям функция  $f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$  должна быть: 1) идемпотентная в пределе совпадения  $f(\sqrt{g}, \dots, \sqrt{g}) = \sqrt{g}$ ; 2) монотонная; 3) однородная по всем аргументам  $f(t\sqrt{g_1}, \dots, t\sqrt{g_N}) = t^\alpha f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$  (из требования идемпотентности следует, что  $\alpha = 1$ ); 4) симметричная по всем аргументам.

Из требования однородности и симметричности функции  $f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N})$  следует, что инвариантный объем взаимодействия может быть представлен как [34]

$$d\Omega_{int}^{(N)} = d^D x \cdot f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}) = d^D x \cdot {}^{2N}\sqrt{g_1 \dots g_N} \cdot f(y_1^{(N)}, \dots, y_N^{(N)}), \quad (2.7)$$

где

$$y_1^{(N)} = {}^{2N}\sqrt{g_1^{N-1} g_2^{-1} g_3^{-1} \dots g_N^{-1}}, \dots, \quad y_N^{(N)} = {}^{2N}\sqrt{g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_{N-1}^{-1} g_N^{N-1}}. \quad (2.8)$$

Переменные  $y_i^{(N)}$  очевидно удовлетворяют тождеству

$$y_1^{(N)} \cdot y_2^{(N)} \cdot \dots \cdot y_N^{(N)} = 1, \quad (2.9)$$

следовательно функция  $f$  в действительности является функцией  $N - 1$  аргументов и инвариантный объем взаимодействия можно записать в виде

$$d\Omega_{int}^{(N)} = d^D x \cdot f(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}) = d^D x \cdot {}^{2N}\sqrt{g_1 \dots g_N} \cdot \hat{f}(y_1^{(N)}, \dots, y_{N-1}^{(N)}), \quad (2.10)$$

где  $\hat{f}(y_1^{(N)}, \dots, y_{N-1}^{(N)}) \stackrel{def}{=} f\left(y_1^{(N)}, \dots, y_{N-1}^{(N)}, \frac{1}{y_1^{(N)} \cdot y_2^{(N)} \cdot \dots \cdot y_{N-1}^{(N)}}\right)$ . Заметим, что в пределе совпадения  $y_i^{(N)} = 1$  и  $f(1, \dots, 1) = 1$ .

Выберем конкретный вид инвариантного объема взаимодействия как произвольную сумму трех средних: среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое с произвольными действительными коэффициентами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда

$$d\Omega_{int}^{(N)} = d^D x \cdot {}^{2N}\sqrt{g_1 \dots g_N} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left[ \frac{\alpha}{N} \sum_{i=1}^N y_i^{(N)} + \beta + \gamma \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{y_i^{(N)}}} \right], \quad (2.11)$$

где  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ . Из соображений простоты, ограничимся этим естественным выражением (2.11) инвариантного объема взаимодействия в мультигравитации. Отметим, что в [20], был рассмотрен частный случай (2.11) при  $\alpha = \gamma = 0$  и  $\beta = 1$  для бигравитации  $N = 2$ .

### 3 ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим общий вид взаимодействия мультигравитации, которое описывается скалярным потенциалом  $V(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$  как функция от  $N$  метрик  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$  в  $D$ -мерном пространстве-времени. Группа симметрии  $N$  вселенных является прямым произведением групп диффеоморфизмов [20]

$$G_{full} = \text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(1)}) \times \text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(2)}) \times \dots \times \text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(N)}), \quad (3.1)$$

где каждый диффеоморфизм  $\text{Diff}(\varepsilon_\mu^{(i)})$  действует на метрику  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$  вдоль вектора  $\varepsilon_\mu^{(i)}(x)$ . По известной теореме [33] группа  $G_{full}$  может быть редуцирована к диагональной подгруппе, когда все векторы совпадают  $\varepsilon_\mu^{(i)}(x) = \varepsilon_\mu(x)$ . Тогда инфинитизимальные преобразования любой метрики  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$  определяются производной Ли

$$\delta \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \mathcal{L}_\varepsilon \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \varepsilon^\rho \partial_\rho \mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} + \mathbf{g}_{\mu\rho}^{(i)} \partial_\nu \varepsilon^\rho + \mathbf{g}_{\rho\nu}^{(i)} \partial_\mu \varepsilon^\rho. \quad (3.2)$$

Понятно, что скалярный потенциал взаимодействия должен быть функцией от скалярных функций от метрик  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ . Естественным выбором этих скалярных функций могут служить инварианты тензора с одним ковариантным и одним контравариантным индексами, построенного из метрик  $\mathbf{H}_{\nu}^{\mu} = \mathbf{H}_{\nu}^{\mu}(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$ . В этом случае собственные значения матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ , соответствующей тензору  $\mathbf{H}_{\nu}^{\mu}$ , являются инвариантами относительно действия общих координатных преобразований  $x^{\mu} \mapsto \tilde{x}^{\mu}$ , поскольку  $\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \mathbf{H}_{\nu}^{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} = \tilde{\mathbf{H}}^{\alpha}_{\beta}$ .

Параметризуем  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$ , используя следующее замечание. В большинстве физически интересных моделей [4] метрика имеет диагональную форму, то есть

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \text{diag} \left( \lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{D-1}^{(i)} \right), \quad (3.3)$$

где  $\lambda_a^{(i)}$  собственные значения  $i$ -той метрики. Следовательно, структура матрицы  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{g}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)})$  может быть описана по аналогии со структурой инвариантного объема взаимодействия (построенного в разделе 2), а именно, построим  $N$  матриц  $\mathbf{H}_{\nu}^{(i)\mu}$  как следующее произведение диагональных метрик

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\nu}^{(i)\mu} = & \mathbf{g}^{(i)\mu\alpha_1} \mathbf{g}_{\alpha_1\rho_1}^{(1)} \mathbf{g}^{(i)\rho_1\beta_1} \mathbf{g}_{\beta_1\rho_2}^{(2)} \dots \mathbf{g}^{(i)\rho_{j-1}\alpha_j} \mathbf{g}_{\alpha_j\rho_j}^{(j)} \mathbf{g}^{(i)\rho_j\beta_j} \mathbf{g}_{\beta_j\rho_{j+1}}^{(j+1)} \\ & \dots \mathbf{g}^{(i)\rho_{N-2}\alpha_{N-1}} \mathbf{g}_{\alpha_{N-1}\rho_{N-1}}^{(N-1)} \mathbf{g}^{(i)\rho_{N-1}\beta_{N-1}} \mathbf{g}_{\beta_{N-1}\nu}^{(N)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом построенные матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^{(i)}$  удовлетворяют тождеству

$$\hat{\mathbf{H}}^{(1)} \hat{\mathbf{H}}^{(2)} \dots \hat{\mathbf{H}}^{(N)} = \mathbf{I}, \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{I} - D \times D$  единичная матрица. Так что имеется  $(N-1)$  независимых матриц  $\hat{\mathbf{H}}^{(i)}$ . В случае бигравитации ( $N=2$ ) имеем две матрицы

$$\mathbf{H}_{\nu}^{(1)\mu} = \mathbf{g}^{(1)\mu\beta_1} \mathbf{g}_{\beta_1\nu}^{(2)}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H}_{\nu}^{(2)\mu} = \mathbf{g}^{(2)\mu\alpha_1} \mathbf{g}_{\alpha_1\nu}^{(1)}, \quad (3.7)$$

которые являются взаимно обратными  $\hat{\mathbf{H}}^{(1)} \hat{\mathbf{H}}^{(2)} = \mathbf{I}$  (см. (3.5)), поэтому достаточно рассматривать только одну из них (см., например, [20]). Исходя из этого, целесообразно определить следующие  $N^2$  матриц  $\hat{\mathbf{p}}^{(i,j)}$  как

$$\mathbf{p}^{(i,j)\mu}_{\nu} = \mathbf{g}^{(i)\mu\rho} \mathbf{g}_{\rho\nu}^{(j)}, \quad (3.8)$$

где  $i, j = 1, \dots, N$ . Очевидно, что  $p$ -матрицы  $\hat{\mathbf{p}}^{(i,j)}$  удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\mathbf{p}}^{(i,j)} \hat{\mathbf{p}}^{(j,k)} = \hat{\mathbf{p}}^{(i,k)}, \quad (3.9)$$

$$\hat{\mathbf{p}}^{(i,j)} \hat{\mathbf{p}}^{(j,i)} = \hat{\mathbf{p}}^{(i,i)} = \mathbf{I}. \quad (3.10)$$

Произведение (3.9) ассоциативно и обратимо (3.10), но определено не для всех элементов, поэтому множество  $p$ -переменных является частичной группой [35]. Заметим, что существует  $N(N-1)/2$  независимых  $p$ -матриц, которые коммутируют в случае диагональных метрик (3.3). В бигравитации  $N=2$ , имеем

$$\hat{\mathbf{H}}^{(1)} = \hat{\mathbf{p}}^{(1,2)}, \quad (3.11)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{(2)} = \hat{\mathbf{p}}^{(2,1)}. \quad (3.12)$$

Построим матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^{(i)}$  из 6 независимых  $p$ -матриц  $\mathbf{p}^{(i,j)}$  для случая тернарной гравитации ( $N=3$ )

$$\hat{\mathbf{H}}^{(1)} = \hat{\mathbf{p}}^{(1,3)} \hat{\mathbf{p}}^{(1,2)}, \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{(2)} = \hat{\mathbf{p}}^{(2,1)} \hat{\mathbf{p}}^{(2,3)}, \quad (3.14)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{(3)} = \hat{\mathbf{p}}^{(3,2)} \hat{\mathbf{p}}^{(3,1)}, \quad (3.15)$$

которые удовлетворяют тождеству

$$\hat{\mathbf{H}}^{(1)} \hat{\mathbf{H}}^{(2)} \hat{\mathbf{H}}^{(3)} = \mathbf{I}. \quad (3.16)$$

Используя (3.3), можно представить структуру собственных значений матриц  $H_{\nu}^{(i)\mu}$  через собственные значения метрик как

$$\hat{H}^{(i)} = \text{diag} \left( \frac{(\lambda_0^{(i)})^N}{R_0}, \frac{(\lambda_1^{(i)})^N}{R_1}, \dots, \frac{(\lambda_{D-1}^{(i)})^N}{R_{D-1}} \right), \quad (3.17)$$

где  $R_a = \prod_{i=1}^N \lambda_a^{(i)}$ . Тогда из (3.17), следует что

$$\det \hat{H}^{(i)} = \frac{(\det \mathbf{g}^{(i)})^N}{\prod_{j=1}^N \det \mathbf{g}^{(j)}}, \quad (3.18)$$

и, очевидно, что  $\prod_{j=1}^N \det \hat{H}^{(j)} = 1$  (см. (3.5)).

Отметим, что для метрики  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)}$  с сигнатурой  $\left( +, \overbrace{-, \dots, -}^{D-1} \right)$  знаки собственных чисел определены так (см., например, [4])  $\lambda_0^{(i)} > 0$ ,  $\lambda_1^{(i)} < 0$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_{D-1}^{(i)} < 0$ . Учитывая (3.17) и (3.5), получаем, что все собственные значения матриц  $\hat{H}^{(i)}$  являются положительными и ненулевыми. Это позволяет определить новые  $\mu$ -переменные

$$\mu_a^{(i)} = \ln \frac{(\lambda_a^{(i)})^N}{R_a}, \quad (3.19)$$

которые удовлетворяют  $D$  тождествам

$$\sum_{i=1}^N \mu_a^{(i)} = 0, \quad a = 0, \dots, D-1. \quad (3.20)$$

Учитывая (3.20), число независимых  $\mu$ -переменных есть  $D(N-1)$ . Таким образом, скалярный потенциал взаимодействия может быть выбран как гладкая функция  $\mu$ -переменных, т.е.

$$V(\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}) = \tilde{v} \left( \mu_a^{(i)} \right). \quad (3.21)$$

Следуя [20] (где рассматривался частный случай  $N = 2$ ,  $D = 4$ ), выбираем более удобный базис в виде симметричных полиномов

$$\sigma_k^{(i)} = \sum_{a=0}^{D-1} \left( \mu_a^{(i)} \right)^k, \quad k = 1, \dots, D, \quad (3.22)$$

связанных между собой  $D$  соотношениями, следующими из (3.20). Таким образом, скалярный потенциал взаимодействия для мультигравитации можно записать в симметричном виде

$$V(\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(N)}) = v \left( \sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_D^{(i)} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.23)$$

где  $v$  — скалярная функция от  $D(N-1)$  независимых полиномов  $\sigma_k^{(i)}$ .

Мы естественно предполагаем, что в случае плоских пространств взаимодействие отсутствует. Тогда имеем “граничное” условие

$$v(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (3.24)$$

Выразим скалярный потенциал взаимодействия (3.23) через комбинацию инвариантов матриц  $\hat{H}^{(i)}$  в явном виде. Из (3.18), (3.19) и (3.22), получаем

$$\sigma_k^{(i)} = \text{tr} \left( \ln \hat{H}^{(i)} \right)^k. \quad (3.25)$$

Параметризуем метрику как

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \eta_{\mu\nu} + \mathbf{h}_{\mu\nu}^{(i)}, \quad (3.26)$$

где  $h_{\mu\nu}^{(i)}$  некоторые возмущения над плоским фоном. Ограничиваясь квадратичными слагаемыми по возмущениям  $h_{\mu\nu}^{(i)}$ , которые соответствуют массивному случаю и отсутствию самодействия, получаем для  $\sigma_1^{(i)}$  и  $\sigma_2^{(i)}$  следующие выражения

$$\sigma_1^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[ \left( h^{(i)} - h^{(j)} \right) - \left( \left( h_{\mu\nu}^{(i)} \right)^2 - \left( h_{\mu\nu}^{(j)} \right)^2 \right) \right], \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(i)} &= (N-1)^2 \left( h_{\mu\nu}^{(i)} \right)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left( h_{\mu\nu}^{(j)} \right)^2 \\ &+ 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ j \neq k, k \neq i, j \neq i}}^N h^{(j)\mu} h^{(k)\nu} - 2(N-1) h^{(i)\mu} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N h^{(j)\nu}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $h^{(i)} := h_{\mu\nu}^{(i)} \eta^{\mu\nu}$  и  $\left( h_{\mu\nu}^{(i)} \right)^2 := h_{\mu\nu}^{(i)} h^{(i)\mu\nu}$ . Заметим, что  $\sigma_k^{(i)} \sim \mathcal{O} \left( \left( h^{(i)} \right)^k \right)$ , следовательно, ограничиваясь квадратичными слагаемыми, нет необходимости рассматривать выражения со степенями  $k \geq 3$ .

Следовательно, скалярный потенциал взаимодействия в мультигравитации в квадратичном приближении можно представить в виде

$$V(\mathbf{g}^{(i)}) = \sum_{i=1}^N \left[ a_i \sigma_1^{(i)} + b_i \left( \sigma_1^{(i)} \right)^2 + c_i \sigma_2^{(i)} \right], \quad (3.29)$$

где  $a_i, b_i, c_i$  произвольные действительные константы. Из (3.27) следует что

$$\sum_{i=1}^N \sigma_1^{(i)} = 0, \quad (3.30)$$

как и должно быть из (3.20).

## 4 МОДЕЛЬ ПАУЛИ-ФИРЦА В БИГРАВИТАЦИИ

В качестве примера рассмотрим бигравитацию ( $N = 2$ ) и получим из общих принципов модель Паули-Фирца. Так, вместо (3.27)–(3.28) имеем (с точностью до квадратичных слагаемых по возмущениям  $h_{\mu\nu}^{(1,2)}$ )

$$\sigma_1^{(1)} = -\sigma_1^{(2)} = h^{(1)} - h^{(2)} - \left( \left( h_{\mu\nu}^{(1)} \right)^2 - \left( h_{\mu\nu}^{(2)} \right)^2 \right) \equiv \sigma_1, \quad (4.1)$$

$$\sigma_2^{(1)} = \sigma_2^{(2)} = \left( h_{\mu\nu}^{(1)} \right)^2 + \left( h_{\mu\nu}^{(2)} \right)^2 - 2h^{(1)\mu} h^{(2)\nu} \equiv \sigma_2. \quad (4.2)$$

Для скалярного потенциала взаимодействия сумма (3.29) принимает вид (с учетом (3.24))

$$V(\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}) = a\sigma_1 + b\sigma_1^2 + c\sigma_2, \quad (4.3)$$

где  $a, b, c$  - произвольные действительные константы размерности  $(mass)^4$ . Тогда полное действие для бигравитации запишется как

$$S_2 = -M_1^2 \int d^4x R_1 \sqrt{g_1} - M_2^2 \int d^4x R_2 \sqrt{g_2} + \int d\Omega_{int}^{(2)} V(\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}), \quad (4.4)$$

где  $M_{1,2}$  константы размерности  $(mass)^1$ , и  $d\Omega_{int}^{(2)}$  - инвариантный объем взаимодействия для бигравитации (2.6), который имеет вид

$$d\Omega_{int}^{(2)} = d^4x \cdot \sqrt[4]{g_1 g_2} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left[ \frac{\alpha}{2} \left( \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} + \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right) + \beta + 2\gamma \left( \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} + \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right)^{-1} \right], \quad (4.5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - безразмерные параметры и  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ . Заметим, что параметризация (3.26) выражения (4.5) приводит к виду

$$d\Omega_{int}^{(2)} = d^4x \cdot \sqrt[4]{g_1 g_2} + \dots, \quad (4.6)$$

где  $\dots$  означают слагаемые квадратичные по возмущениям  $h_{\mu\nu}^{(1,2)}$ . Эти слагаемые не вносят вклада в (4.4), потому что мы ограничиваемся вторым порядком, а скалярный потенциал взаимодействия (4.3) не содержит слагаемых без  $h_{\mu\nu}^{(1,2)}$ . Используя разложение (3.26) и применяя его к действию (4.4), получаем

$$S_2 = \int d^4x (L_{kin} + L_{int}), \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} L_{kin} = & \frac{1}{4} M_1^2 \left[ \partial^\rho h_{\mu\nu}^{(1)} \partial_\rho h^{(1)\mu\nu} - \partial^\mu h^{(1)} \partial_\mu h^{(1)} + 2\partial_\mu h^{(1)\mu\nu} \partial_\nu h^{(1)} - 2\partial_\mu h^{(1)\mu\nu} \partial_\rho h_\nu^{(1)\rho} \right] \\ & + \frac{1}{4} M_2^2 \left[ \partial^\rho h_{\mu\nu}^{(2)} \partial_\rho h^{(2)\mu\nu} - \partial^\mu h^{(2)} \partial_\mu h^{(2)} + 2\partial_\mu h^{(2)\mu\nu} \partial_\nu h^{(2)} - 2\partial_\mu h^{(2)\mu\nu} \partial_\rho h_\nu^{(2)\rho} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} L_{int} = & a(h^{(1)} - h^{(2)})^2 + b \left( h_{\mu\nu}^{(1)} - h_{\mu\nu}^{(2)} \right) \left( h^{(1)\mu\nu} - h^{(2)\mu\nu} \right) + c \left( h_{\mu\nu}^{(2)} h^{(2)\mu\nu} - h_{\mu\nu}^{(1)} h^{(1)\mu\nu} \right) \\ & + \frac{c}{4} \left( \left( h^{(1)} \right)^2 - \left( h^{(2)} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее, применим (3+1)-разложение [31] для полного действия (4.7). Отделим пространственные и временные компоненты в  $L_{int}$ , тогда

$$\begin{aligned} L_{int} = & a \left( h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(1)} + h_{ii}^{(2)} \right)^2 + \\ & + b \left( h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)} \right) \left( h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)} \right) - 2b \left( h_{0i}^{(1)} - h_{0i}^{(2)} \right) \left( h_{0i}^{(1)} - h_{0i}^{(2)} \right) + b \left( h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(2)} \right) \left( h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(2)} \right) + \\ & + c \left( h_{00}^{(2)} h_{00}^{(2)} - 2h_{0i}^{(2)} h_{0i}^{(2)} + h_{ij}^{(2)} h_{ij}^{(2)} - h_{00}^{(1)} h_{00}^{(1)} + 2h_{0i}^{(1)} h_{0i}^{(1)} - h_{ij}^{(1)} h_{ij}^{(1)} \right) + \\ & + \frac{c}{4} \left( \left( h_{00}^{(1)} - h_{ii}^{(1)} \right)^2 - \left( h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(2)} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Мы ограничимся рассмотрением только скалярного сектора, так как это является вполне достаточным для уничтожения духовых мод в спектре (для стандартной гравитации, см. [31]). Параметризуем (3+1) разложение в виде

$$h_{00}^{(1,2)} = 2\varphi_{(1,2)}, \quad (4.11)$$

$$h_{0i}^{(1,2)} = \partial_i B_{(1,2)}, \quad (4.12)$$

$$h_{ij}^{(1,2)} = -2(\psi_{(1,2)} \delta_{ij} - \partial_i \partial_j E_{(1,2)}), \quad (4.13)$$

где  $\varphi_{(1,2)}, \psi_{(1,2)}, B_{(1,2)}, E_{(1,2)}$  - скалярные поля для возмущенной метрики  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $h_{\mu\nu}^{(2)}$  соответственно. Из (4.7) получаем для кинетического слагаемого

$$\begin{aligned} L_{kin} = & M_1^2 \left[ -2\psi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 6\dot{\psi}_1^2 - 4\varphi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k B_1 + 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k \dot{E}_1 \right] + \\ & + M_2^2 \left[ -2\psi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 6\dot{\psi}_2^2 - 4\varphi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k B_2 + 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k \dot{E}_2 \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

и взаимодействия

$$\begin{aligned} L_{int} = & a(2(\varphi_1 - \varphi_2) + 6(\psi_1 - \psi_2) - 2\Delta(E_1 - E_2))^2 + \\ & + b(4(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 2(B_1 - B_2)(\Delta B_1 - \Delta B_2) + 12(\psi_1 - \psi_2)^2 + 4(\Delta E_1 - \Delta E_2)^2 - \\ & - 8(\psi_1 - \psi_2)(\Delta E_1 - \Delta E_2)) + \\ & + c \left( 4(\varphi_2^2 - \varphi_1^2) + 12(\psi_2^2 - \psi_1^2) + B_2 \Delta B_2 - B_1 \Delta B_1 + 4 \left( (\Delta E_2)^2 - (\Delta E_1)^2 \right) + \right. \\ & \left. + 8(\psi_1 \Delta E_1 - \psi_2 \Delta E_2) \right) + c \left( (\varphi_1 + 3\psi_1 - \Delta E_1)^2 - (\varphi_2 + 3\psi_2 - \Delta E_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Далее, рассмотрим часть полного лагранжиана, содержащую скалярные поля  $\varphi_{(1,2)}$ ,

$$\begin{aligned} L(\varphi) = & -4M_1^2\varphi_1\Delta\psi_1 - 4M_2^2\varphi_2\Delta\psi_2 + \varphi_1^2(4a + 4b - 3c) + \varphi_2^2(4a + 4b + 3c) + \\ & + \varphi_1(24a(\psi_1 - \psi_2) - 8a(\Delta E_1 - \Delta E_2) + 6c\psi_1 - 2c\Delta E_1) + \\ & + \varphi_2(-24a(\psi_1 - \psi_2) + 8a(\Delta E_1 - \Delta E_2) - 6c\psi_2 + 2c\Delta E_2) - 8\varphi_1\varphi_2(a + b). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Очевидно, что при

$$4a + 4b - 3c = 0 \quad (4.17)$$

$$4a + 4b + 3c = 0 \quad (4.18)$$

$$a + b = 0 \quad (4.19)$$

лагранжиан не содержит квадратичных слагаемых по полям  $\varphi_{(1,2)}$ , то есть скалярные поля являются нединамическими (подробнее см. [31]). Система (4.17)–(4.19) эквивалентна

$$a + b = 0, \quad c = 0 \quad (4.20)$$

Отметим, что только при таких соотношениях на параметры лагранжиан можно представить через разности соответствующих полей. Введем

$$\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4.21)$$

$$B \equiv B_1 - B_2 \quad (4.22)$$

$$\psi \equiv \psi_1 - \psi_2 \quad (4.23)$$

$$E \equiv E_1 - E_2 \quad (4.24)$$

тогда лагранжиан взаимодействия (4.15) принимает вид

$$L_{int}^{(2)} = 4a \left[ 6\psi^2 + 6\varphi\psi - 2\varphi\Delta E - 4\psi\Delta E - \frac{1}{2}B\Delta B \right] \quad (4.25)$$

Данное выражение совпадает с массовым лагранжианом Паули-Фирца в 3+1 разложении стандартной гравитации [31]. Для того, чтобы доказать эквивалентность бигравитации (4.4) и теории Паули-Фирца, необходимо включить в рассмотрение также и кинетическую часть. Отметим, что кинетическое слагаемое (4.14) можно представить через поля (4.21)–(4.24) только с использованием уравнений движения. Для этого выпишем полный лагранжиан (4.14) и (4.15) с учетом (4.21) и (4.22), имеем

$$\begin{aligned} L_{kin}^{(2)} + L_{int}^{(2)} = & M_1^2 \left[ -2\psi_1\partial_k\partial_k\psi_1 - 6\dot{\psi}_1^2 - 4\varphi_1\partial_k\partial_k\psi_1 - 4\dot{\psi}_1\partial_k\partial_k B_1 + 4\dot{\psi}_1\partial_k\partial_k\dot{E}_1 \right] + \\ & + M_2^2 \left[ -2\psi_2\partial_k\partial_k\psi_2 - 6\dot{\psi}_2^2 - 4\varphi_2\partial_k\partial_k\psi_2 - 4\dot{\psi}_2\partial_k\partial_k B_2 + 4\dot{\psi}_2\partial_k\partial_k\dot{E}_2 \right] + \\ & + 24a(\psi_1 - \psi_2)^2 + 4a[6(\varphi_1 - \varphi_2)(\psi_1 - \psi_2) - 2(\varphi_1 - \varphi_2)\Delta(E_1 - E_2)] - \\ & - 16a(\psi_1 - \psi_2)\Delta(E_1 - E_2) - 2a(B_1 - B_2)\Delta(B_1 - B_2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Система уравнений Эйлера-Лагранжа по полям  $B_{1,2}$  принимает вид

$$\begin{cases} 4M_1^2\Delta\dot{\psi}_1 + 4a(\Delta B_1 - \Delta B_2) = 0 \\ 4M_2^2\Delta\dot{\psi}_2 + 4a(\Delta B_2 - \Delta B_1) = 0 \end{cases}, \quad (4.27)$$

где мы представили нужную нам часть лагранжиана как

$$L(B) = 4M_1^2\partial_k\dot{\psi}_1\partial_k B_1 + 4M_2^2\partial_k\dot{\psi}_2\partial_k B_2 + 2a(\partial_k B_1 - \partial_k B_2)(\partial_k B_1 - \partial_k B_2). \quad (4.28)$$

Учитывая (4.22) формула (4.27) переходит в

$$\begin{cases} M_1^2\Delta\dot{\psi}_1 = -a\Delta B \\ M_2^2\Delta\dot{\psi}_2 = a\Delta B \end{cases}, \quad (4.29)$$

откуда следует

$$M_1^2\psi_1 = -M_2^2\psi_2. \quad (4.30)$$



Для поля  $\psi$  см. (4.23) получаем

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = \psi_1 + \frac{M_1^2}{M_2^2}\psi_1 = \frac{M_1^2 + M_2^2}{M_2^2}\psi_1 = -\frac{M_2^2}{M_1^2}\psi_2 - \psi_2 = -\frac{M_1^2 + M_2^2}{M_1^2}\psi_2. \quad (4.31)$$

Учитывая (4.29), имеем

$$B = \frac{M_1^2}{-a}\dot{\psi}_1 = \frac{M_1^2 M_2^2}{-a(M_1^2 + M_2^2)}\dot{\psi} \quad (4.32)$$

Тогда, часть лагранжиана  $L(B)$ , (4.28) принимает вид

$$L(B) = 2\frac{M_1^4 M_2^4}{a(M_1^2 + M_2^2)^2}\dot{\psi}\Delta\dot{\psi}. \quad (4.33)$$

Варьирование (4.26) по полям  $\varphi_{(1,2)}$  приводит к системе

$$\begin{cases} -M_1^2\Delta\psi_1 + 6a(\psi_1 - \psi_2) - 2a(\Delta E_1 - \Delta E_2) = 0 \\ -M_2^2\Delta\psi_2 - 6a(\psi_1 - \psi_2) + 2a(\Delta E_1 - \Delta E_2) = 0 \end{cases}, \quad (4.34)$$

которая, с учетом (4.24) и (4.30), эквивалентна выражению

$$\Delta E = -\frac{M_1^2 M_2^2}{2a(M_1^2 + M_2^2)}\Delta\psi + 3\psi. \quad (4.35)$$

Тогда, часть лагранжиана, содержащую поля  $E_{1,2}$ , можно переписать в виде

$$L(E) = 4M_1^2\dot{\psi}_1\Delta\dot{E}_1 + 4M_2^2\dot{\psi}_2\Delta\dot{E}_2 - 8a\varphi\Delta E - 16a\psi\Delta E = \quad (4.36)$$

$$= 4\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}\dot{\psi}\left(-\frac{M_1^2 M_2^2}{2a(M_1^2 + M_2^2)}\Delta\dot{\psi} + 3\dot{\psi}\right) - 8a(\varphi + 2\psi)\left(-\frac{M_1^2 M_2^2}{2a(M_1^2 + M_2^2)}\Delta\psi + 3\psi\right). \quad (4.37)$$

Оставшиеся слагаемые в кинетическом выражении полного лагранжиана (4.26) также выразим через поле  $\psi$

$$L_k(\psi) = -2M_1^2\psi_1\Delta\psi_1 - 2M_2^2\psi_2\Delta\psi_2 - 6M_1^2\dot{\psi}_1^2 - 6M_2^2\dot{\psi}_2^2 - 4M_1^2\varphi_1\Delta\psi_1 - 4M_2^2\varphi_2\Delta\psi_2 = \quad (4.38)$$

$$= -2\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}\left(\psi\Delta\psi + 3\dot{\psi}^2 + 2\varphi\Delta\psi\right). \quad (4.39)$$

Полный лагранжиан (4.26) есть

$$\begin{aligned} L_{EH}^{(2)} + L_{int}^{(2)} &= L_k(\psi) + L(B) + L(E) + 24a\psi^2 + 24a\varphi\psi = \\ &= 6\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}\left(\dot{\psi}^2 + \psi\Delta\psi\right) - 24a\psi^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Представим постоянную  $a$  через новую постоянную  $m_g^2$

$$a = \frac{1}{4}\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}m_g^2, \quad (4.41)$$

тогда скалярный сектор бигравитации принимает вид

$$L = 6\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}\left(\dot{\psi}^2 + \psi\Delta\psi - m_g^2\psi^2\right) = 6\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}\left(\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - m_g^2\psi^2\right), \quad (4.42)$$

где  $m_g$  - масса гравитона. Тогда действие (4.4) с учетом условий (4.20) запишется, как

$$S_g = -M_1^2 \int R_1 \sqrt{-g_1} d^4x - M_2^2 \int R_2 \sqrt{-g_2} d^4x - \frac{1}{4} \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 + M_2^2} \int (g_1 g_2)^{1/4} d^4x (\sigma_2 - \sigma_1^2). \quad (4.43)$$

Из этого следует, что только полное действие бигравитации приводит к теории Паули-Фирца. Отметим, что в работе [20] слагаемое взаимодействия было предложено на основе полу-эвристических рассуждений, в то время, как мы показали это в рамках квадратичного приближения, используя 3+1 разложение.

## 5 ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе мы построили инвариантный объем взаимодействия мультигравитации в общем виде. Частный случай объема как сумма трех различных средних (в работе [20] рассматривалось только геометрическое среднее) был использован при анализе модели бигравитации. В рамках формализма 3+1 разложения нами строго доказана (в квадратичном приближении) эквивалентность полного лагранжиана бигравитации (с учетом кинетических слагаемых типа эйнштейновских) и массивной теории Паули-Фирца.

## А Приложение. РАЗЛОЖЕНИЕ $\sqrt{g}$ ПО МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

При разложении  $\sqrt{g}$  по малым возмущениям  $h_{\mu\nu}$  стандартным образом используем выражение  $\ln(\det \mathbf{g}_{\mu\nu}) = \text{tr}(\ln \mathbf{g}_{\mu\nu})$ , из которого получаем

$$\sqrt{g} = \exp\left(\frac{1}{2}\text{tr}(\ln \mathbf{g}_{\mu\nu})\right). \quad (\text{A.1})$$

Над плоской фоновой метрикой  $\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  имеем

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h_{\mu\alpha}h^{\mu\alpha} + \frac{1}{8}h^2, \quad (\text{A.2})$$

с точностью  $O(h^2)$ , где  $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ .

Приведем здесь методику вычисления разложения  $\sqrt{g}$  пригодную для любой  ${}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu}$  фоновой метрики. Общие формулы для разложения  $\sqrt{g}$  с точностью до первого порядка были приведены в [34], а с точностью до второго порядка в [36]. Имеем

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = {}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Тогда (в случае  $D = 4$ ) получаем

$$\det\left({}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right) = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \left({}^{(0)}\mathbf{g}_{0\alpha} + h_{0\alpha}\right) \left({}^{(0)}\mathbf{g}_{1\beta} + h_{1\beta}\right) \left({}^{(0)}\mathbf{g}_{2\rho} + h_{2\rho}\right) \left({}^{(0)}\mathbf{g}_{3\sigma} + h_{3\sigma}\right), \quad (\text{A.4})$$

где  $\varepsilon^{0123} = +1$ . С точностью  $O(h^2)$  имеем

$$\det\left({}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right) = \det\left({}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu}\right) + h_{\mu\nu}K^{\mu\nu}\left({}^{(0)}\mathbf{g}\right) + h_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}F^{\mu\nu\alpha\beta}\left({}^{(0)}\mathbf{g}\right), \quad (\text{A.5})$$

где

$$K^{\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \left(\delta_0^\mu \delta_\alpha^\nu \delta_1^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho} \delta_3^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} + \delta_1^\mu \delta_\beta^\nu \delta_0^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho} \delta_3^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} + \delta_2^\mu \delta_\rho^\nu \delta_0^{(0)} \mathbf{g}_{1\beta} \delta_3^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} + \delta_3^\mu \delta_\sigma^\nu \delta_0^{(0)} \mathbf{g}_{1\beta} \delta_2^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho}\right), \quad (\text{A.6})$$

$$F^{\mu\nu\alpha\beta} = \varepsilon^{\chi\omega\rho\sigma} \left(\delta_0^\mu \delta_\chi^\nu \delta_1^\alpha \delta_\omega^\beta \delta_2^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} \delta_\rho^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} + \delta_0^\mu \delta_\chi^\nu \delta_2^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_1^{(0)} \mathbf{g}_{1\omega} \delta_3^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} + \delta_0^\mu \delta_\chi^\nu \delta_3^\alpha \delta_\sigma^\beta \delta_1^{(0)} \mathbf{g}_{1\omega} \delta_2^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho} + \delta_1^\mu \delta_\omega^\nu \delta_2^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_0^{(0)} \mathbf{g}_{0\chi} \delta_3^{(0)} \mathbf{g}_{3\sigma} + \delta_1^\mu \delta_\omega^\nu \delta_3^\alpha \delta_\sigma^\beta \delta_0^{(0)} \mathbf{g}_{0\chi} \delta_2^{(0)} \mathbf{g}_{2\rho} + \delta_2^\mu \delta_\rho^\nu \delta_3^\alpha \delta_\sigma^\beta \delta_0^{(0)} \mathbf{g}_{0\chi} \delta_1^{(0)} \mathbf{g}_{1\omega}\right). \quad (\text{A.7})$$

Общее выражение для разложения  $\sqrt{g}$  принимает вид

$$\sqrt{g} = \sqrt{{}^{(0)}g} - \frac{h_{\mu\nu}K^{\mu\nu}\left({}^{(0)}\mathbf{g}\right) + h_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}F^{\mu\nu\alpha\beta}\left({}^{(0)}\mathbf{g}\right)}{2\sqrt{{}^{(0)}g}} - \frac{\left(h_{\mu\nu}K^{\mu\nu}\left({}^{(0)}\mathbf{g}\right)\right)^2}{8\sqrt{{}^{(0)}g}^3}, \quad (\text{A.8})$$

где  ${}^{(0)}g = |\det {}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu}|$ .

В статье рассматривается стандартный случай (разложение над плоской метрикой)  ${}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , тогда  ${}^{(0)}g$ ,  $K^{\mu\nu}$ ,  $F^{\mu\nu\alpha\beta}$  переходят в

$$\det\left({}^{(0)}\mathbf{g}_{\mu\nu}\right) = {}^{(0)}g = -1, \quad K^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}) \quad (\text{A.9})$$

и мы имеем для (A.8)

$$\sqrt{g} = 1 - \frac{-h + h_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})}{2} - \frac{(-h)^2}{8} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{h^2}{8}. \quad (\text{A.10})$$

Важным является тот факт, что это выражение совпало с (A.2).

## Список литературы

- [1] P. D. Mannheim, *Progress Part. Nucl. Phys.* **56** (2006), 340–445.
- [2] H. F. M. Goenner, *Living Rev. Rel.* **7** (2004), 153 pp.
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, New York, 1972.
- [4] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [5] C. J. Isham, A. Salam, and J. Strathdee, *Phys. Rev.* **D3** (1971), 867–873.
- [6] P. C. Aichelburg, R. Mansouri, and H. K. Urbantke, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971), 1533–1534.
- [7] P. C. Aichelburg, *Phys. Rev.* **D8** (1973), 377–384.
- [8] I. I. Kogan and G. G. Ross, *Phys. Lett.* **B485** (2000), 255–262.
- [9] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, A. Papazoglou, and G. G. Ross, *Nucl. Phys.* **B595** (2001), 225–249.
- [10] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos, and A. Papazoglou, *Phys. Lett.* **B501** (2001), 140–149.
- [11] C. Deffayet and J. Mourad, *Phys. Lett.* **B589** (2004), 48–58.
- [12] C. Deffayet and J. Mourad, *Int. J. Theor. Phys.* **43** (2004), 855–864.
- [13] R. Garattini, *J. Phys.* **A40** (2007), 7055–7060.
- [14] D. Blas, *AIP Conf. Proc.* **841** (2006), 397–401.
- [15] S. Hannestad, *Int. J. Mod. Phys.* **A21** (2006), 1938–1949.
- [16] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Grav. Cosmol.* **12** (2006), 159–162.
- [17] S. L. Dubovsky, P. G. Tinyakov, and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005), 181102.
- [18] T. Damour, I. I. Kogan, and A. Papazoglou, *Phys. Rev.* **D66** (2002), 104025.
- [19] C. Deffayet, G. Dvali, and G. Gabadadze, *Phys. Rev.* **D65** (2002), 044023.
- [20] T. Damour and I. I. Kogan, *Phys. Rev.* **D66** (2002), 104024.
- [21] C. de Rham and G. Gabadadze, *Phys. Rev.* **D82** (2010), 044020.
- [22] D.G. Boulware and Stanley Deser, *Phys. Rev.* **D6** (1972), 3368–3382.
- [23] K. Koyama, G. Niz, and G. Tasinato, *Phys. Rev.* **D84** (2011), 064033.
- [24] C. de Rham, G. Gabadadze, and A. J. Tolley, *JHEP* **1111** (2011), 093.
- [25] A. H. Chamseddine and V. Mukhanov, *JHEP* **1108** (2011), 091.
- [26] S. F. Hassan and R. A. Rosen, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012), 041101.
- [27] V. I. Zakharov, *JETP Lett.* **12** (1970), 312–315.
- [28] H. van Dam and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* **B22** (1970), 397–411.
- [29] A. I. Vainshtein, *Phys. Lett.* **B39** (1972), 393–394.
- [30] E. Babichev, C. Deffayet, and R. Ziour, *Phys. Rev.* **D82** (2010), 104008.
- [31] V. A. Rubakov and P. G. Tinyakov, *Phys.-Usp.* **51** (2008), 759–792.
- [32] K. Hinterbichler, *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012), 671–710.
- [33] N. Boulanger, T. Damour, L. Gualtieri, and M. Henneaux, *Nucl. Phys.* **B597** (2001), 127–171.

- [34] S. A. Duplij and A. T. Kotvytskiy, *J. Kharkov National Univ., ser. Nuclei, Particles and Fields* **784** (2007), 61–66.
- [35] R. Hermann, *Quantum and Fermion Differential Geometry*, Math. Sci. Press, Brookline, 1994.
- [36] A. T. Kotvytskiy and D. V. Kruchkov, *Acta Polytechnika* **51** (2011), 54–58.