Décroissance exponentielle des corrélations pour un système dynamique réel induit d'un système en dimension 2

JAGER Lisette, MAES Jules, NINET Alain

1$^{\text{er}}$ septembre 2018

Résumé

On étudie le processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ à variables réelles bornées défini par $X_{n+2} = \varphi(X_n, X_{n+1})$. On cherche à obtenir la décroissance des corrélations de ce modèle en prenant uniquement des hypothèses analytiques sur la transformation.

1 Introduction

Depuis les années 80, l'étude des séries temporelles non-linéaires par les statisticiens a permis de modéliser de nombreux phénomènes en Physique, Économie et en Finance. Mais c'est dans les années 90 que la théorie du Chaos est devenue un axe de recherche incontournable pour l'étude de ces processus. Pour une revue complète de cette littérature, sur la théorie du Chaos on pourra consulter Collet-Eckmann [CE] et concernant l'étude des séries temporelles non-linéaires Chan-Tong [TON1]. Dans cette perspective, un modèle général pourrait s'écrire :

$$X_{t+1} = \varphi(X_t, \ldots, X_{t-d+1}) + \varepsilon_t,$$

avec φ non-linéaire et ε_t un bruit. Nous proposons une première étude du "squelette" de ce modèle comme l'appelle Tong [TON2] en commençant avec $d = 2$, c'est à dire par une étude d'un système dynamique induit de ce modèle. En effet, on considère le modèle à variables bornées, $X_{n+2} = \varphi(X_n, X_{n+1})$, avec $\varphi : \mathcal{U}^2 \to \mathcal{U}$ pour $\mathcal{U} = [-L, L]$ et $L \in \mathbb{R}_+^*$, φ étant définie par morceaux sur $\mathcal{U}^2$. Ce modèle induit un système dynamique (Ω, τ, μ, T) où μ est une mesure invariante par la transformation $T : \Omega \to \Omega$, et Ω un compact de $\mathbb{R}^2$. Nous obtenons sous certaines hypothèses sur φ, telles que T vérifie les hypothèses de Saussol [SAU], la décroissance exponentielle des corrélations si T est mélange. Plus précisément, pour des applications f et h bien choisies, il existe une constante $C = C(f, h) > 0$, $0 < \rho < 1$ tels que :

$$\left| \int_\Omega f \circ T^n \, h \; d\mu - \int_\Omega f d\mu \; \int_\Omega h d\mu \right| \leqslant C \, \rho^n.$$

Ce résultat nous permet d'en déduire une inégalité de covariance du type :

$$|\operatorname{Cov}(\, f(X_n), h(X_0)\,)\,| \leqslant C \, \rho^n.$$

D'autres voies seraient possibles pour obtenir le même résultat sous différentes hypothèses sur le système induit. On peut en effet citer la méthode des "tours de Young" [YOU]. Pour une vue d'ensemble de ces techniques, on pourra consulter l'article de Alves-Freitas-Luzzato-Vaienti [AFLV].

A la fin de cet article, nous illustrons nos résultats par deux exemples, l'un linéaire par morceaux et l'autre non linéaire.

2 Hypothèses et résultats

Soit $\varphi : [-L, L]^2 \to [-L, L]$ pour un certain $L \in \mathbb{R}_+^*$, définie par morceaux sur $[-L, L]^2$. Pour étudier le processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ défini par $X_{n+2} = \varphi(X_n, X_{n+1})$, il existe différentes façons de choisir le système dynamique induit $Z_{n+1} = T(Z_n)$ avec $Z_n \in \mathbb{R}^2$. Nous avons tenté deux approches, d'une part la méthode canonique, en prenant $T(x, y) = (y, \varphi(x, y))$, et d'autre part une double itération, ce qui revient à prendre $T(x, y) = (\varphi(x, y), \varphi(y, \varphi(x, y)))$. Il s'avère que la première méthode, moyennant une conjugaison ($T(x, y) = (\frac{y}{\gamma}, \gamma\varphi(x, \frac{y}{\gamma}))$ avec $Z_n = (X_n, \gamma X_{n+1})$) est la plus fructueuse, les hypothèses à imposer pour faire fonctionner la seconde approche étant plus lourdes et les résultats obtenus moins bons. Il a alors été possible de travailler dans des espaces similaires aux espaces V_α de Saussol et d'utiliser ses résultats.

Plus précisément, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$[-L, L]^2 = \bigcup_{k=1}^{d} O_k \ \cup \mathcal{N},$$
où les O_k sont des ouverts non vides, $\mathcal{N}$ est de mesure de Lebesgue nulle et la réunion est disjointe. Les bords des O_k sont inclus dans des sous-variétés compactes C^1 de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
2. Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots d\}$, il existe une application φ_k définie sur $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x, y), \overline{O_k}) \leq \varepsilon_1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\varphi_k|_{O_k} = \varphi|_{O_k}$.
3. L'application φ_k est bornée, de classe $C^{1,\alpha}$ sur $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$ pour un $\alpha \in]0, 1]$ [1], ce qui signifie que φ_k est de classe C^1 et qu'il existe $C_k > 0$ tel que, pour tous $(u, v), (u', v')$ de $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$,
$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(u', v') \right| \leq C_k ||(u, v) - (u', v')||^\alpha$$
$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(u', v') \right| \leq C_k ||(u, v) - (u', v')||^\alpha.$$
On suppose également qu'il existe $A > 1$ et $M \in]0, A - 1[$ tels que :
$$\forall (u, v) \in B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k}), \qquad \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(u, v) \right| \geq A, \quad \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(u, v) \right| \leq M.$$
4. Les O_k vérifient la condition géométrique qui suit [2] : pour tous (u, v) et (u', v) de $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$, il existe un chemin $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2) : [0, 1] \to B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$, de classe C^1, reliant (u, v) à (u', v), de gradient non nul et vérifiant
$$\forall t \in]0, 1[, \left|\Gamma_1'(t)\right| > \frac{M}{A} \left|\Gamma_2'(t)\right|.$$
5. Le nombre maximal d'arcs C^1 de $\mathcal{N}$ se croisant en un point est $Y \in \mathbb{N}^*$. De plus, on pose
$$s = \left(\frac{2A + M^2 - M\sqrt{M^2 + 4A}}{2} \right)^{-1/2} < 1$$
et l'on suppose que
$$\eta := s^\alpha + \frac{8s}{\pi(1 - s)} Y < 1.$$

1. Si φ_k est de classe C^2 sur $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$, elle est nécessairement de classe $C^{1,\alpha}$ sur $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$ avec $\alpha = 1$

2. Dans les cas favorables, l'hypothèse géométrique peut être remplacée par la suivante, plus forte mais plus simple : pour tous points (u, v) et (u', v) de $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$, le segment $[(u, v), (u', v)]$ est inclus dans $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$

On notera $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{A}} < 1$ et, pour tout $k \in \{1, ..., d\}$, U_k (resp. W_k, $\mathcal{N}'$) sera l'image de O_k (resp. $B_{\varepsilon_1}(\overline{O_k})$, $\mathcal{N}$) par l'affinité qui à $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ associe $(u, \gamma v)$. L'ensemble $\Omega = [-L, L] \times [-\gamma L, \gamma L]$, sur lequel nous travaillerons, sera l'image de $[-L, L]^2$ par cette même affinité.

Pour tout borélien de mesure non nulle S de $\mathbb{R}^2$, pour toute $f \in L^1_m(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on notera :

$$Osc(f, S) = \underset{S}{Esup} f - \underset{S}{Einf} f$$

où $\underset{S}{Esup}$ et $\underset{S}{Einf}$ représentent le sup et l'inf essentiels sur S pour la mesure de Lebesgue m.
On définit alors :

$$|f|_\alpha = \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1} \varepsilon^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Osc}(f, B_\varepsilon(x, y))\ dxdy \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\alpha = \|f\|_{L^1_m} + |f|_\alpha$$

puis l'ensemble $V_\alpha = \{f \in L^1_m(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ \|f\|_\alpha < +\infty\}$.

Nous introduisons des notions similaires sur Ω : pour tout $0 < \varepsilon_0 < \gamma\varepsilon_1$, pour tout $g \in L^\infty_m(\Omega, \mathbb{R})$, on définit :

$$N(g, \alpha, L) = \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{\Omega} \mathrm{Osc}(g, B_\varepsilon(x, y) \cap \Omega)\ dxdy.$$

On pose alors :

$$||g||_{\alpha,L} = N(g, \alpha, L) + 16(1 + \gamma)\varepsilon_0^{1-\alpha} L ||g||_\infty + ||g||_{L^1_m}.$$

On dit que g appartient à $V_\alpha(\Omega)$ si cette quantité est finie. Cet ensemble ne dépend pas du choix de ε_0, mais N et $\|.\|_{\alpha,L}$ en dépendent.
Il existe des liens entre ces deux ensembles. En effet, on peut démontrer le résultat suivant grâce à la proposition 3.4 de [SAU] :

Proposition 1 *1. Si $g \in V_\alpha(\Omega)$ et si on prolonge g en une fonction notée f en posant $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin \Omega$, alors $f \in V_\alpha$ et*

$$\|f\|_\alpha \le \|g\|_{\alpha,L}.$$

2. Soit $f \in V_\alpha$. Posons $g = f\mathbf{1}_\Omega$. Alors $g \in V_\alpha(\Omega)$ et l'on a

$$\|g\|_{\alpha,L} \le \left(1 + 16(1 + \gamma)L \frac{\max(1, \varepsilon_0^\alpha)}{\pi\varepsilon_0^{1+\alpha}}\right) \|f\|_\alpha.$$

On obtient ainsi, sous les hypothèses 1 à 5 précédentes, un premier résultat :

Théorème 2 *Soit T la transformation définie sur Ω par : $\forall (x, y) \in U_k$:*

$$T(x, y) = T_k(x, y) = \left(\frac{y}{\gamma},\ \gamma\varphi_k(x, \frac{y}{\gamma})\right).$$

La définition des T_k s'étend naturellement à W_k par la même formule. Alors :

1. *L'opérateur de Perron-Frobénius $P : L^1_m(\Omega) \to L^1_m(\Omega)$ associé à T a un nombre fini de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de module 1.*
2. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, l'espace propre $E_i = \{f \in L^1_m(\Omega) : Pf = \lambda_i f\}$ associé à la valeur propre λ_i est inclus dans $V_\alpha(\Omega)$ et de dimension finie.*

3. *L'opérateur P se décompose en*

$$P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i + Q,$$

où les P_i sont des projections sur les espaces E_i, $|||P_i|||_1 \leq 1$ et Q est un opérateur linéaire sur $L^1_m(\Omega)$, vérifiant $Q(V_\alpha(\Omega)) \subset V_\alpha(\Omega)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |||Q^n|||_1 < \infty$ et $|||Q^n|||_{\alpha,L} = O(q^n)$ quand $n \to +\infty$ pour un $q \in]0,1[$. De plus $P_iP_j = 0$ si $i \neq j$, $P_iQ = QP_i = 0$ pour tout i.

4. *L'opérateur P admet 1 comme valeur propre. Supposons que $\lambda_1 = 1$, soit $h_* = P_1\mathbf{1}_\Omega$ et soit $d\mu = h_*\, dm$. Alors μ est la plus grande mesure invariante absolument continue (ACIM) de T, au sens suivant : si $\nu << m$ et ν est T invariante, alors $\nu << \mu$.*

5. *Le support de μ peut être décomposé en un nombre fini d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, sur lesquels une puissance de T est mélange (mixing). Plus précisément, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, \dim(E_1)\}$, il existe $L_j \in \mathbb{N}^*$ et L_j ensembles $W_{j,l}$ $(0 \leq l \leq L_j - 1)$ deux à deux disjoints, vérifiant $T(W_{j,l}) = W_{j,l+1 \mod (L_j)}$ et T^{L_j} est mélange sur chaque $W_{j,l}$. On note $\mu_{j,l}$ la "restriction normalisée" de μ à $W_{j,l}$ définie par*

$$\mu_{j,l}(B) = \frac{\mu(B \cap W_{j,l})}{\mu(W_{j,l})},\ d\mu_{j,l} = \frac{h^*\mathbf{1}_{W_{j,l}}}{\mu(W_{j,l})}dm.$$

Dire que T^{L_j} est mélange sur chaque $W_{j,l}$ signifie que, pour tout $f \in L^1_{\mu_{j,l}}(W_{j,l})$ et pour tout $h \in L^\infty_{\mu_{j,l}}(W_{j,l})$,

$$\lim_{n\to+\infty} < T^{nL_j} f, h >_{\mu_{j,l}} = < f, 1 >_{\mu_{j,l}} < 1, h >_{\mu_{j,l}}$$

avec les notations indifféremment employées : $< f, g >_{\mu'} = \mu'(fg) = \int fg\, d\mu'$.

6. *De plus, il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que, pour tout h dans $V_\alpha(\Omega)$ et $f \in L^1_\mu(\Omega)$, on a*

$$\left| \int_\Omega f \circ T^{n\times ppcm(L_i)} h\, d\mu - \sum_{j=1}^{\dim(E_1)} \sum_{l=0}^{L_j-1} \mu(W_{j,l}) < f, 1 >_{\mu_{j,l}} < 1, h >_{\mu_{j,l}} \right| \leq C||h||_{\alpha,\Omega} ||f||_{L^1_\mu(\Omega)}\, \rho^n.$$

7. *Si de plus T est mélange[3], alors le résultat précédent peut s'écrire : il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que, pour tout h dans $V_\alpha(\Omega)$ et $f \in L^1_\mu(\Omega)$, on a :*

$$\left| \int_\Omega f \circ T^n\, h\, d\mu - \int_\Omega f d\mu\ \int_\Omega h d\mu \right| \leq C||h||_{\alpha,\Omega}\ ||f||_{L^1_\mu(\Omega)}\ \rho^n.$$

Revenons maintenant au système initial et essayons d'en déduire la loi invariante associée à X_n. Si $(X_n)_n$ est défini par X_0, X_1 à valeurs dans $[-L, L]$ et la relation de récurrence $X_{n+2} = \varphi(X_n, X_{n+1})$, on pose $Z_n = (X_n, \gamma X_{n+1})$. Alors $(Z_n)_n$ vérifie la relation de récurrence $Z_{n+1} = T(Z_n)$ et on en déduit :

Théorème 3 *Supposons que la variable aléatoire $Z_0 = (X_0, \gamma X_1)$ a pour densité h_*. Alors Z_n a pour densité h_*. En prenant les marginales, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n a pour densité*

$$f : x \mapsto \int_{[-\gamma L, \gamma L]} h_*(x, v)\ dv = \gamma \int_{[-L, L]} h_*(u, \gamma x)\ du.$$

3. Ce qui équivaut à : si 1 est la seule valeur propre de P de module 1 et si de plus elle est simple

En effet, comme $Z_n = (X_n, \gamma X_{n+1})$ a la densité h_*, on obtient que X_n a la densité f en calculant la première marginale. En calculant la deuxième, on a que γX_{n+1} a la densité $g = g(y)$ définie par

$$g(y) = \int_{[-L,L]} h_*(u, y)\ du.$$

On en déduit que X_{n+1} a la densité $y \mapsto \gamma g(\gamma y)$. Or Z_{n+1} a aussi la densité h_*, donc X_{n+1} a aussi la densité f donnée par la première marginale, ce qui donne l'égalité annoncée.

Si F est définie sur $[-L, L]$, notons $Tr\ F$ la fonction définie, sur Ω, par $Tr\ F(x, y) = F(x)$.
On a le résultat suivant, conséquence directe du point 6 du théorème 2 appliqué à $Tr\ F$ et $Tr\ H$:

Théorème 4 *Pour tout B borélien et I intervalle, si (X_0, X_1) suit la loi invariante, on a :*

$$\left| P\left(X_{n\times ppcm(L_i)} \in B, X_0 \in I\right) - \sum_{j=1}^{\dim(E_1)} \sum_{l=0}^{L_j-1} \mu(W_{j,l}) < Tr\ \mathbf{1}_B, 1 >_{\mu_{j,l}} < 1, Tr\ \mathbf{1}_I >_{\mu_{j,l}} \right|$$

$$\leq 16(1+\gamma)\ C\ L^3\ (10\varepsilon_0^{1-\alpha} + L)\ \rho^n.$$

Plus généralement, soit F définie, mesurable sur $[-L, L]$ telle que $Tr\ F$ appartienne à $L^1_\mu(\Omega)$. Soit $H \in L^\infty_m([-L, L])$ telle que $\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{[-L,L]} \mathrm{Osc}(H,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap[-L, L])\ dx < +\infty$. Alors $Tr\ H \in V_\alpha(\Omega)$ et

$$\left| E(F(X_{n\times ppcm(L_i)})H(X_0)) - \sum_{j=1}^{\dim(E_1)} \sum_{l=0}^{L_j-1} \mu(W_{j,l})\mu_{j,l}(Tr\ F)\mu_{j,l}(Tr\ H) \right| \leq C(F, H)\ \rho^n$$

avec

$$C(F, H) = C\ L\ ||Tr\ F||_{L^1_\mu} \left(2\gamma \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{[-L,L]} \mathrm{Osc}(H,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap[-L, L])\ dx \right.$$
$$\left. +16(1+\gamma)\ \varepsilon_0^{1-\alpha}||H||_{L^\infty_m([-L,L])} + 2\gamma\ ||H||_{L^1_m([-L,L])} \right).$$

Si de plus T est mélange, alors :

$$|Cov(F(X_n), H(X_0))| \leq C(F, H)\ \rho^n.$$

3 Démonstrations

Le théorème 2 est une conséquence des théorèmes 5.1 et 6.1 de [SAU]. La difficulté réside dans la vérification, par T, des hypothèses (PE1) à (PE5).

Pour vérifier (PE2), nous allons d'abord montrer que T_k est un C^1 difféomorphisme de W_k dans $T_k(W_k)$. L'hypothèse 3 sur $\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}$ assure que T_k est un difféomorphisme local. Pour l'injectivité, considérons (x, y) et (x', y') deux points différents de W_k, ayant même image par T_k. On obtient $y = y'$ et $\varphi_k(x', y/\gamma) = \varphi_k(x, y/\gamma)$. En utilisant l'hypothèse géométrique 4 et en appliquant le théorème des accroissements finis à $t \mapsto \varphi_k(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$, on aboutit à une contradiction.
Les hypothèses de régularité sur les φ_k (et donc les T_k) permettent d'établir que $\det(DT_k^{-1})$ est höldérien d'exposant α, si l'on restreint convenablement le domaine : on peut voir qu'il existe, pour chaque k, $\beta_k > 0$, un ouvert $\mathcal{V}_k$ d'adhérence compacte et une constante c_k tels que

– $\overline{U_k} \subset \mathcal{V}_k \subset \overline{\mathcal{V}_k} \subset W_k$;
– $B_{\beta_k}(T_k(U_k)) \subset T_k(\mathcal{V}_k)$;
– pour tout $\varepsilon < \beta_k$, tout $z \in T_k(\mathcal{V}_k)$ et tous $x, y \in B_\varepsilon(z) \cap T_k(\mathcal{V}_k)$, on ait

$$\left| \det(DT_k^{-1}(x)) - \det(DT_k^{-1}(y)) \right| \leq c_k \left| \det(DT_k^{-1}(z)) \right| \varepsilon^\alpha.$$

En posant $\beta = \min_k \beta_k > 0$ et $c = \max_k c_k > 0$, on obtient des constantes valables pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, d'où (PE2) est vérifiée.

Cela permet de fixer les ouverts sur lesquels on va travailler : il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $B_{2\varepsilon_2}(\overline{U_k}) \subset \mathcal{V}_k \subset W_k$. On prend désormais $V_k = B_{\varepsilon_2}(\overline{U_k})$. On a $T_k(V_k)$ ouvert et $T_k(\overline{U_k})$ compact inclus dans $T_k(V_k)$. On peut trouver un $\varepsilon_0^1 > 0$ tel que $B_{\varepsilon_0^1}(T_k(\overline{U_k})) \subset T_k(V_k)$ pour tout k. L'hypothèse (PE1) est ainsi vérifiée.

L'hypothèse (PE3) est évidente car $\Omega = \bigcup_{k=1}^{d} U_k \; \cup \mathcal{N}'$ est une réunion disjointe d'ouverts et d'une partie négligeable.

Pour (PE4), on procède en deux étapes : d'abord montrer un résultat de dilatance lorsque les points antécédents dans $\mathcal{V}_k$ sont proches (proposition 5) puis l'hypothèse proprement dite (proposition 6), résultat de dilatance lorsque les points images dans $T_k(V_k)$ sont proches.

Proposition 5 *Soient (x, y) et $(x', y') \in \mathcal{V}_k$ tels que le segment $[(x, y), (x', y')]$ soit inclus dans $\mathcal{V}_k$. Alors*

$$||T_k(x, y) - T_k(x', y')||^2 \geq \frac{1}{s^2}||(x, y) - (x', y')||^2.$$

Démonstration : On applique le théorème des accroissement finis à l'application définie sur $[0, 1]$ par $t \mapsto \varphi_k(x + t(x' - x), \frac{1}{\gamma}(y + t(y' - y))$, ce qui nous permet de voir qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$||T_k(x, y) - T_k(x', y')||^2 = (x' - x, y' - y)B \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \gamma^2 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \right)^2 & \gamma \frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \\ \gamma \frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) & \frac{1}{\gamma^2} + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \right)^2 \end{pmatrix}$$

avec $(x_c, y_c) = (x + c(x' - x), y + c(y' - y))$.
La matrice B est symétrique, réelle. Posons

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathrm{Tr}(B) &&= \frac{1}{\gamma^2} + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \right)^2 \\ \xi_2 &= \det(B) &&= \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(x_c, \frac{1}{\gamma} y_c) \right)^2. \end{aligned}$$

Nous allons établir que les valeurs propres de B sont supérieures ou égales à $\frac{1}{s^2}$. En effet, l'application $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\zeta(x, y) = (x+y, xy)$ réalise une bijection entre les ensembles

$$V_s'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : s^{-2} \leq x \leq y\} \quad \text{et} \quad \zeta(V_s'') = \{(\xi_1, \xi_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \xi_1 \geq 2s^{-2},\ \xi_2 \geq s^{-2}(\xi_1 - s^{-2}),\ \xi_2 \leq \frac{\xi_1^2}{4}\}.$$

Il suffit donc de vérifier que (ξ_1, ξ_2) est dans $\zeta(V_s'')$ pour avoir le résultat.
Or, les valeurs propres de B sont réelles, le discriminant de son polynôme caractéristique est

positif donc $4\xi_2 \leq \xi_1^2$ et les conditions sur A et M, ainsi que le choix de s et γ, assurent que les deux autres inégalités sont vérifiées.
Donc la matrice B a ses valeurs propres supérieures ou égales à s^{-2}. Il s'ensuit que $||T_k(x,y) - T_k(x',y')||^2 \geq \frac{1}{s^2}||(x,y) - x',y')||^2$.

Par des arguments de compacité, on montre qu'il existe $\varepsilon_0^2 > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in \overline{V_k}$,

$$B_{\varepsilon_0^2}(T_k(x,y)) \subset T_k(B_{\varepsilon_2}(x,y)).$$

Proposition 6 *Soit* $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2) > 0$. *On rappelle que* $\overline{U_k} \subset V_k \subset \overline{V_k} \subset \mathcal{V}_k \subset W_k$. *Alors :*

- *Quels que soient* $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in T_k(V_k)$ *vérifiant* $d((u_1,v_1),(u_2,v_2)) < \varepsilon_0$, *on a l'inégalité*

$$s^2\ d((u_1,v_1),(u_2,v_2)) > d(T_k^{-1}(u_1,v_1),(T_k^{-1}(u_2,v_2)).$$

  avec $s^2 < 1$.
- $B_{\varepsilon_0}(T_k(\overline{U_k})) \subset T_k(V_k)$.

Démonstration : La deuxième affirmation vient de ce que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^1$ et de ce qu'on a obtenu dans (PE1).
La première affirmation entraîne la condition (PE4) de Saussol. En effet, soient $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in T_k(V_k)$ vérifiant $d((u_1,v_1),(u_2,v_2)) < \varepsilon_0$. Soit $(x,y) = T_k^{-1}(u_1,v_1) \in V_k$. D'après la remarque précédente, ε_0 étant inférieur à ε_0^2,

$$(u_2,v_2) \in B_{\varepsilon_0}(T_k(x,y)) \subset T_k(B_{\varepsilon_2}(x,y)).$$

Donc $(x',y') = T_k^{-1}(u_2,v_2) \in B_{\varepsilon_2}(x,y) \subset \mathcal{V}_k$. D'après la proposition 5,

$$d((u_1,v_1),(u_2,v_2))^2 = ||T_k(x,y) - T_k(x',y')||^2 > \sigma||(x,y) - (x',y')||^2,$$

ce qui prouve le résultat.

Pour finir, l'hypothèse (PE5) vient du lemme 2.1 de Saussol et de l'hypothèse 6.

Puisque les hypothèses (PE1) à (PE5) sont vérifiées, le théorème 5.1 de [SAU] implique les propriétés 1 à 5 du théorème 2 sur V_α et L_m^1. Mais, si $f \in E_i$, f est nulle sur Ω^c et donc $f \in L_m^1(\Omega)$ et $V_\alpha(\Omega)$.

Pour démontrer le point 6, nous allons appliquer le théorème 6.1 de [SAU] sur chaque $W_{j,l}$ où une puissance de T est mélange. Avec les notations du point 5 du théorème 5.2 de [SAU], on a l'existence de constantes $C > 0$ et $\rho \in]0,1[$ telles que, pour tout (j,l) vérifiant $1 \leq j \leq \dim(E_1)$, $0 \leq l \leq L_j - 1$, toute fonction $f \in L^1_{\mu_{j,l}}(\Omega)$ et pour toute fonction $h \in V_\alpha(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega (f - \mu_{j,l}(f)) \circ T^{nL_j} h\ d\mu_{j,l}\right| \leq C||f - \mu_{j,l}(f))||_{L^1_{\mu_{j,l}}}||h||_{\alpha,L}\rho^n.$$

Soient alors $h \in V_\alpha(\Omega)$ et $f \in L^1_\mu(\Omega)$ (de sorte que $f \in L^1_{\mu_{j,l}}(\Omega)$ pour chaque j,l). En prenant le p.p.c.m. L' des L_j et en faisant la somme des inégalités ci-dessus, avec n remplacé par $n\frac{L'}{L_j}$, on obtient

$$\left|\int_\Omega f \circ T^{nL'} h\ d\mu - \sum_{j=1}^{\dim(E_1)} \sum_{l=0}^{L_j-1} \mu(W_{j,l})\mu_{j,l}(f)\mu_{j,l}(h)\right| \leq C||h||_{\alpha,\Omega}||f||_{L^1_\mu}\rho^n.$$

Le point 7 est une conséquence directe du 6, vu que $\dim(E_1) = 1$ et que $L_1 = 1$.

Passons au théorème 4. Si $\begin{pmatrix} X_0 \\ \gamma X_1 \end{pmatrix}$ suit la loi μ, alors $\begin{pmatrix} X_n \\ \gamma X_{n+1} \end{pmatrix}$ aussi. Si $f \in L^1_\mu(\Omega)$ et si $h \in V_\alpha(\Omega)$, on a :

$$\left| E\left(f\begin{pmatrix} X_{nL'} \\ \gamma X_{nL'+1} \end{pmatrix} h\begin{pmatrix} X_0 \\ \gamma X_1 \end{pmatrix}\right) - \sum_{j=1}^{\dim(E_1)} \sum_{l=0}^{L_j-1} \mu(W_{j,l})\mu_{j,l}(f)\mu_{j,l}(h)\right| \leq C||f||_{L^1_\mu}||h||_{\alpha,\Omega}\rho^n.$$

Pour que $Tr\ H$ appartienne à $V_\alpha(\Omega)$, il faut et il suffit que H soit dans $L^\infty([-L,L],m)$ et vérifie

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{[-L,L]} \mathrm{Osc}(H,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap[-L,L])\ dx < \infty.$$

De plus,

$$\begin{aligned} ||Tr\ H||_{\alpha,\Omega} &= 2\gamma L \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{[-L,L]} \mathrm{Osc}(H,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap[-L,L])\ dx \\ &+16(1+\gamma)L\varepsilon_0^{1-\alpha}||H||_{L^\infty_m([-L,L])} + 2\gamma L||H||_{L^1_m([-L,L])}. \end{aligned}$$

Donc si H vérifie ces conditions et si F est telle que $Tr\ F$ soit dans $L^1_\mu(\Omega)$, par exemple si F est mesurable et bornée sur $[-L,L]$, on a

$$\begin{aligned} &\left| E(F(X_{n\times L'})H(X_0)) - \sum_{j=1}^{\dim(E_1)} \sum_{l=0}^{L_j-1} \mu(W_{j,l})\mu_{j,l}(Tr\ F)\mu_{j,l}(Tr\ H)\right| \\ &\leq C||Tr\ F||_{L^1_\mu} \left(2\gamma L \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{[-L,L]} \mathrm{Osc}(H,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap[-L,L])\ dx \right. \\ &\left. +16(1+\gamma)L\varepsilon_0^{1-\alpha}||H||_{L^\infty_m([-L,L])} + 2\gamma L||H||_{L^1_m([-L,L])}\right)\rho^n. \end{aligned}$$

En particulier, si H est l'indicatrice d'un intervalle et F, celle d'un borélien, on obtient la première assertion du théorème 4.

4 Exemples

4.1 Un cas non linéaire

On note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f_k la fonction polynomiale $f_k(x) = -\dfrac{71}{2}x^2 - 214x + k - \dfrac{1}{2}$.
Pour tout $-179 \leq k \leq 250$, on définit l'ouvert O_k par :

$$O_k = \{(u,v) \in]-1,1[^2\ /\ f_k(u) < v < f_{k+1}(u)\}.$$

On considère les applications φ_k définies sur $B_1(\overline{O_k})$ ($\varepsilon_1 = 1$) pour tout $-179 \leq k \leq 250$ par :

$$\varphi_k(u,v) = 2v - 2f_k(u) - 1.$$

On définit $\varphi : [-1,1]^2 \to [-1,1]$ presque partout en posant $\varphi_{|O_k} = \varphi_k{}_{|O_k}$ pour tout $-179 \leq k \leq 250$. Nous allons maintenant nous assurer que ces fonctions et ouverts vérifient les conditions de la partie 2.

La condition sur les ouverts est facilement vérifiée, puisque $[-1,1]^2 \backslash \bigcup_{k=-179}^{250} O_k$ est une réunion de segments et de paraboles. De plus, le nombre maximal d'arcs se croisant est $Y = 3$.
Les conditions de régularité sont satisfaites car les φ_k sont C^∞ sur $B_1(\overline{O_k})$. On prend $\alpha = 1$.

Les dérivées partielles vérifient les inégalités suivantes : pour tout $-179 \leq k \leq 250$ et pour tout $(u,v) \in B_1(\overline{O_k})$ on a :

$$\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial v}(u,v)\right| = 2 = M$$

et

$$\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial u}(u,v)\right| = 2|71u+214| > 2(214-71(1+1)) = 144 = A > M+1.$$

Dans ce cas, $\gamma = \frac{1}{12}$. Un calcul montre que $s \leq \frac{1}{10}$ et $\eta < 1$.
On pose $\Omega = [-1,1] \times \left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right]$ et pour tout $-179 \leq k \leq 250$ on définit les ouverts

$$U_k = \{(x,y) \in \mathring{\Omega} : f_k(x) < 12y < f_{k+1}(x)\}.$$

On obtient les applications

$$T_k(x,y) = (12y, \frac{2}{12}(12y - f_k(x)) - \frac{1}{12}).$$

Si $-177 \leq k \leq 248$, $T_k(U_k) = \mathring{\Omega}$ et T_k est bijectif de U_k sur $\mathring{\Omega}$.
Sinon, on peut vérifier que T_{-178} est une bijection de U_{-178} sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$, où Ω_1 est la partie ouverte de $\mathring{\Omega}$ située au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{2x+1}{12}$, Ω_3 celle située sous la droite $y = \frac{2x-1}{12}$ et Ω_2 celle située entre ces deux droites. On a des relations similaires pour $k = -177$, 249 et 250 et d'autres sous-ensembles de Ω.

Enfin la condition géométrique est vérifiée sous sa forme simple (l'ouvert contient le segment horizontal).
La transformation T admet donc une densité invariante h_*.

Soit P l'opérateur de Perron Frobenius associé à T. On peut vérifier que les fonctions constantes ne sont pas invariantes par P, donc que h_* n'est pas constante. On pose

$$\psi_k(x,y) = (214)^2 - 71(2x-12y) + 142k.$$

Alors Ph a l'expression $Ph(x,y) = \displaystyle\sum_{k=a}^{b} h(T_k^{-1}(x,y)) \frac{1}{2\sqrt{\Psi_k(x,y)}}$, avec $(a,b) = (-179, 248)$ si $(x,y) \in \Omega_1$, $(a,b) = (-178, 249)$ si $(x,y) \in \Omega_2$, $(a,b) = (-177, 250)$ si $(x,y) \in \Omega_3$.

On va établir que $P1 \neq 1$. Supposons que $h = 1$ et posons $z = x - 6y$.
Si $(x,y) \in \Omega_3$, $z \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. La fonction $z \mapsto \sqrt{(214)^2 - 142z + 142k}$ est strictement décroissante sur $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. Donc $z \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{(214)^2 - 71(2x-12y) + 142k}}$ est strictement croissante sur $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ et $P1$ n'est donc pas constante.

4.2 Un cas linéaire par morceaux

Dans toute cette partie, a et b sont des entiers relatifs non nuls, L est un entier ou demi entier strictement positif.
On note $\mathcal{U}^2$ le carré $[-L,L]^2$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ouvert Ω_n est défini par

$$\Omega_n = \{(u,v) \in]-L,L[^2 : \; av + bu \in](2n-1)L, (2n+1)L[\}.$$

On désigne par Δ_n la droite d'équation $av + bu = (2n-1)L$. On définit φ_n sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi_n(u,v) = av + bu - 2nL.$$

Alors $\varphi_n|_{\Omega_n}$ est à valeurs dans $]-L, L[$ et l'on pose

$$\forall (u,v) \in \Omega_n,\ \varphi(u,v) = \varphi_n(u,v).$$

On impose la condition suivante, avec $S = 1 + \frac{48}{\pi} + \frac{288}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{12}{\pi}\right)\sqrt{6\pi + 36}$,

$$|a| < \frac{|b| - S}{\sqrt{S}}.$$

On vérifie les conditions de la partie 2.
Le carré $\mathcal{U}^2$ est la réunion disjointe d'un nombre fini d'ouverts Ω_n et d'une partie négligeable constituée d'une nombre fini de segments de droites.
Le nombre maximal de croisements de ces segments est $Y = 3$.
Pour tout $\eta > 0$, les ouverts $B_\eta(\Omega_n)$ sont convexes donc le chemin Γ joignant deux points de même ordonnée est le segment horizontal et la condition géométrique est satisfaite.
Les φ_n sont de classe C^∞ sur $B_\eta(\Omega_n)$. On prendra $\alpha = 1$. De plus $\varphi_n(\Omega_n) \subset [-L, L]$.
On pose $M = |a|$, $A = |b|$, de sorte que les inégalités sur les dérivées partielles soient satisfaites.
La majoration de $|a|$ implique que $0 < M < A - 1$.
On définit $\gamma = |b|^{-1/2}$, le coefficient d'aplatissement et on vérifie que $\eta < 1$.

On détermine pour quels entiers n la droite Δ_n intersecte le carré $\mathcal{U}^2$. On vérifie que $\Delta_n \cap \mathcal{U}^2 \neq \emptyset$ si et seulement si

$$\frac{-|a| - |b| + 1}{2} \leq n \leq \frac{|a| + |b| + 1}{2}.$$

On définit $\mathcal{N}(a,b)$ comme étant l'ensemble des indices n tels que $\Omega_n \neq \emptyset$ intersecte $\mathcal{U}^2$.
Posons

$$\Omega = [-L, L] \times [-\gamma L, \gamma L]$$

et

$$\Omega_{n,a} = \{(x,y) \in \mathring{\Omega}\ :\ a\sqrt{|b|}y + bx - 2nL \in]-L, L[\}$$

On pose

$$\begin{array}{cccl} T_n & : & \Omega_{n,a} & \rightarrow \quad \Omega \\ & & (x,y) & \mapsto \quad (\sqrt{|b|}y, ay + \frac{b}{\sqrt{|b|}}x - \frac{2nL}{\sqrt{|b|}}). \end{array}$$

On définit T presque partout, de Ω dans lui-même en posant $T|_{\Omega_{n,a}} = T_n$.

L'opérateur de Perron Frobenius P associé à T a l'expression

$$Ph(x,y) = \frac{1}{|b|} \sum_{n \in \mathcal{N}(a,b)} \mathbf{1}_{(x,y) \in T_n(\Omega_{n,a})} h(T_n^{-1}(x,y)).$$

Si h est une fonction constante égale à $c > 0$, on en déduit que

$$Ph(x,y) = \frac{c}{|b|} \sharp\{n \in \mathcal{N}(a,b)\ :\ (x,y) \in T_n(\Omega_{n,a})\}.$$

On vérifie que ce cardinal est bien $|b|$, ce qui donne une densité invariante constante.
Or le théorème donne l'existence d'une mesure invariante $h^* m$, donnée par $P_1 \mathbf{1}_\Omega = h^*$. D'après le lemme 4.1 de [ITM],

$$P_1 \mathbf{1}_\Omega = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega.$$

Références

[AFLV] ALVES José F., FREITAS Jorge M., LUZZATTO Stefano, VAIENTI Sandro, *From rates of mixing to recurrence times via large deviations, Advances in Mathematics*, **228** (2011), n **2** 1203-1236.

[CE] COLLET Pierre, ECKMANN Jean-Pierre, *Concepts and results in chaotic dynamics : a short course.* Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, Berlin (2006).

[HK] HOFBAUER Franz, KELLER Gerhard, *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Mathematische Zeitschrift **180** (1982), 119-140.

[ITM] IONESCU TULCEA C.T., MARINESCU G., *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, Annals of Mathematics **Vol. 52, n2** (1950), 140-147.

[LM] LASOTA Andrzej, MACKEY Michael C., *Chaos, fractals and noise : stochastic aspects of dynamics*, Springer Verlag, New York (1998)

[LIV] LIVERANI Carlangelo, *Multidimensional expanding maps with singularities : a pedestrian approach*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **Vol. 33, n1** (2013), 168-182.

[SAU] SAUSSOL Benoît, *Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps*, Israel Journal of Mathematics **116** (2000), 223-248.

[TON1] TONG Howell, *Nonlinear time series. A dynamical system approach.* With an appendix by K. S. Chan. Oxford Statistical Science Series, **6**. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1990).

[TON2] TONG Howel, *Nonlinear time series analysis since 1990 : some personal reflections.* Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 18 (2002), no. **2**, 177-184.

[YOU] YOUNG Lai-Sang, *Recurrence times and rates of mixing*, Israel Journal of Mathematics **110** (1999), 153-188.