

Collective excitation branch in the continuum of pair-condensed Fermi gases : analytical study and scaling laws

Yvan Castin

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

Hadrien Kurkjian

TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Antwerp, Belgium

Abstract

The pair-condensed unpolarized spin-1/2 Fermi gases have a collective excitation branch in their pair-breaking continuum (V.A. Andrianov, V.N. Popov, 1976). We study it at zero temperature, with the eigenenergy equation deduced from the linearized time-dependent BCS theory and extended analytically to the lower half complex plane through its branch cut, calculating both the dispersion relation and the spectral weights (quasiparticle residues) of the branch. In the case of BCS superconductors, so called because the effect of the ion lattice is replaced by a short-range electron-electron interaction, we also include the Coulomb interaction and we restrict ourselves to the weak coupling limit $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ (Δ is the order parameter, μ the chemical potential) and to wavenumbers $q = O(1/\xi)$ where ξ is the size of a pair; when the complex energy z_q is expressed in units of Δ and q in units of $1/\xi$, the branch follows a universal law insensitive to the Coulomb interaction. In the case of cold atoms in the BEC-BCS crossover, only a contact interaction remains, but the coupling strength Δ/μ can take arbitrary values, and we study the branch at any wave number. At weak coupling, we predict three scales, that already mentioned $q \approx 1/\xi$, that $q \approx (\Delta/\mu)^{-1/3}/\xi$ where the real part of the dispersion relation has a minimum and that $q \approx (\mu/\Delta)/\xi \approx k_F$ (k_F is the Fermi wave number) where the branch reaches the edge of its existence domain. Near the point where the chemical potential vanishes on the BCS side, $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, where $\xi \approx k_F$, we find two scales $q \approx (\mu/\Delta)^{1/2}/\xi$ and $q \approx 1/\xi$. In all cases, the branch has a limit 2Δ and a quadratic start at $q = 0$. These results were obtained for $\mu > 0$, where the eigenenergy equation admits at least two branch points $\epsilon_a(q)$ and $\epsilon_b(q)$ on the positive real axis, and for an analytic continuation through the interval $[\epsilon_a(q), \epsilon_b(q)]$. We find new continuum branches by performing the analytic continuation through $[\epsilon_b(q), +\infty[$ or even, for q low enough, where there is a third real positive branch point $\epsilon_c(q)$, through $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ and $[\epsilon_c(q), +\infty[$. On the BEC side $\mu < 0$ not previously studied, where there is only one real positive branch point $\epsilon_a(q)$, we also find new collective excitation branches under the branch cut $[\epsilon_a(q), +\infty[$. For $\mu > 0$, some of these new branches have a low-wavenumber exotic hypoacoustic $z_q \approx q^{3/2}$ or hyperacoustic $z_q \approx q^{4/5}$ behavior. For $\mu < 0$, we find a hyperacoustic branch and a nonhypoacoustic branch, with a limit 2Δ and a purely real quadratic start at $q = 0$ for $\Delta/|\mu| < 0.222$.

Keywords: Fermi gases; pair condensate; collective modes; pair breaking; superconductor; ultracold atoms; BCS theory

1. Introduction and position of the problem

We first consider a three-dimensional gas of neutral spin 1/2 fermions with short-range s wave attractive interactions, spatially homogeneous and taken in the thermodynamic limit, that is nonzero density and infinite size. The gas is unpolarized, that is, it has the same number of particles in each spin state \uparrow and \downarrow , and is prepared at zero temperature. As predicted by BCS theory, all fermions due to attraction between \uparrow and \downarrow form bound pairs $\uparrow\downarrow$ of zero orbital moment, these pairs constituting moreover a condensate (with an infinite pair coherence length) and a superfluid.

We are interested here in collective excitation modes of the system and in their dispersion relation according to their wave vector \mathbf{q} . We mean by collective excitation a global oscillation of the gas bringing into play collective

variables such as the density ρ or the complex order parameter Δ of the gas, these functions acquiring a spatio-temporal variation $\rho(\mathbf{r}, t)$ and $\Delta(\mathbf{r}, t)$ at wave vector \mathbf{q} and at the real angular frequency $\omega_{\mathbf{q}}$ or complex $z_{\mathbf{q}}/\hbar$ (if the mode is damped). These are linear modes, associated with a small deviation of ρ and Δ from their value in the ground state or, in practice, to a linear response of the gas to a weak external perturbation. We exclude any excitation which does not conserve the number of fermions in each spin state, of the coherent Rabi coupling type between \uparrow and \downarrow .

To better specify the object of our study, let us recall that the excitations of a gas of paired fermions can fall roughly into two categories. Low energy excitations have a small quantum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ compared to the binding energy E_0 of a pair. They then only affect the motion of the center of mass of the pairs, the pairs start to oscillate while keeping their integrity: in this case it is an acoustic excitation of the gas, the modes being part of a sound branch with a linear start, $\omega_{\mathbf{q}} \sim cq$ when $q \rightarrow 0$, c being the speed of sound. This type of excitation is shared by all the superfluids subjected to short range interaction, independently of the quantum statistics of the constituent particles. But only the start of the dispersion relation, at best $q\xi \lesssim 1$ where ξ is the size of a bound pair, is universal in our system; the non-universal part was the subject of a very detailed study in reference [1]. High energy excitations have a quantum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ greater than E_0 : as nothing prevents it energetically, the pairs will be broken into two free fermions \uparrow and \downarrow , one of wave vector $\mathbf{q}/2 + \mathbf{k}$ and the other of wave vector $\mathbf{q}/2 - \mathbf{k}$ since the excitation deposits a quantum of well defined momentum $\hbar\mathbf{q}$; on the other hand, the relative wave vector (or internal to the pair) \mathbf{k} is not constrained.¹ The energy cost of such excitation by pair breaking is therefore, in BCS theory, $E_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{q})} = \epsilon_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}}$ where $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ is the dispersion relation of the BCS quasiparticles, which has a band gap of width $E_0/2$ by definition of E_0 . As \mathbf{k} can span \mathbb{R}^3 , the excitation spectrum $E_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{q})}$ spans a continuum at \mathbf{q} fixed, whose lower edge is $\geq E_0$ and which extends up to $+\infty$.

One could believe that such a continuum does not contain any collective mode and that the intensity of the response functions of the system at the angular frequency $\omega > E_0/\hbar$ exhibits only broad variations with ω , excluding narrow structures like a Lorentzian resonance $\propto |\hbar\omega - z_{\mathbf{q}}|^{-2}$ associated with a complex energy mode $z_{\mathbf{q}}$. Since the work of Andrianov and Popov [2], in the weak interaction and low wave number regime, and its recent generalization to the arbitrary interaction and wave number regime [3], we know that the opposite occurs: as long as the chemical potential μ of the gas is > 0 , therefore that the minimum $E_0/2$ of $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ is reached in BCS theory at a nonzero wave number $k_0 > 0$, the fermion gas exhibits indeed, in its broken pair continuum, a branch of collective excitation $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ spanning the entire interval $]0, 2k_0[$. As the collective continuum mode can be damped by the emission of broken pairs, its energy is complex, $\text{Im } z_{\mathbf{q}} < 0$; at low wave number, $q \rightarrow 0$, $z_{\mathbf{q}}$ tends to E_0 quadratically in q , the mode acquires an angular eigenfrequency better and better defined and induces a lorentzian peak more and more narrow in the response functions of the system, which guarantees its observability [3].

The continuum collective branch $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ of our fermion gas has not been the subject of in-depth analytical studies, apart from the low wave number regime $q \rightarrow 0$. For example, we do not know, for any interaction strength, to what value of q extends the law of quadratic variation of $z_{\mathbf{q}}$ previously mentioned. Or, the numerical study of reference [3] suggests that, in the weak interaction regime, the eigenfrequency $\text{Re } z_{\mathbf{q}}/\hbar$ exhibit on $]0, 2k_0[$ a minimum at $q = q_{\min}$, but nothing is said about the variation of q_{\min} with the interaction strength. At a fixed wave number $q > 0$, we also do not know if the dispersion relation has a simple limiting law when the interaction strength tends to zero. In the strong interaction regime, near the point of zero chemical potential ($\mu \rightarrow 0^+$) where the continuum collective branch disappears as a whole [3], we do not know analytically the form of the dispersion relation, nor the wave number scales which structure it. In addition, the continuum collective branch $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ in references [2, 3] was obtained by carrying out on the eigenvalue equation for the modes of the system an analytic continuation passing from the upper half-plane ($\text{Im } z \geq 0$) than the lower half-plane ($\text{Im } z < 0$) through the natural interval separating the first two branch points $z = \epsilon_1 = E_0$ and $z = \epsilon_2$ of the eigenvalue equation on the positive real half-axis, even if this fact is implicit in reference [2]. What would happen if we made an analytic continuation while passing rather through the interval $[\epsilon_2, +\infty[$ or, in the case where there is a third branch point $\epsilon_3 > \epsilon_2$, through the intervals $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ and $[\epsilon_3, +\infty[$? Could we thus discover other continuum collective branches ? Could there even be a continuum collective branch for $\mu < 0$, where the pairs tend to become bosonic ? Finally, we have limited ourselves for the moment to neutral fermion gases, the physical system we had in mind being that of cold atoms, which has the advantage of allowing an adjustment at will of the interaction strength by magnetic Feshbach resonance [4, 5, 6, 7, 8, 9]. What about the electron gases in BCS superconductors, i.e. idealized superconductors, where the effect of the crystal lattice and its phonons is modeled by

1. In reality, pair breaking at fixed \mathbf{q} starts from the energy threshold $\inf_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{q})}$, which is none other than the edge of the continuum defined below.

an attractive short-range interaction between \uparrow and \downarrow ? We must add to the latter the repulsive Coulomb interaction between electrons, independent of spin and long range, which, as we know, suppresses the acoustic branch [10]. What about the continuum collective branch ? In reference [2], the eigenvalue equation on the angular frequency of the modes was modified to take account of the Coulomb interaction; it was then shown, in the weak interaction limit $E_0 \ll \epsilon_F$ where ϵ_F is the Fermi energy of the gas, that the continuum collective branch survives and that its complex dispersion relation remains the same as in the presence of the only short-range interaction, at least as long as $q\xi \lesssim 1$ therefore that the dispersion relation remains approximately quadratic. Can we, while remaining in the weak interaction regime relevant for BCS superconductors (E_0/ϵ_F is typically of the order of 10^{-3} or 10^{-4}), extend the study of the branch beyond the quadratic regime by imposing only $q\xi = O(1)$ when $E_0/\epsilon_F \rightarrow 0$, and see if Coulomb's interaction still has no effect in this case ? All these haunting questions call for an in-depth complementary study, which is the subject of this article.

To complete our introduction, let's give the outline of the article. Section 2 briefly presents the formalism used: the interaction between neutral fermions is modeled by an on-site contact attraction, after discretization of space into a cubic lattice of spacing b ; to describe the evolution of the independent collective variables ρ , Δ and Δ^* of the system after a weak and bounded in time perturbation of the ground state, we can use the linearized time-dependent BCS equations around their stationary solution; the eigenvalue equation is written as the determinant of a matrix function of z and \mathbf{q} , a 3×3 matrix since there are three independent variables, and of which we recall how to carry out the analytic continuation at $\text{Im } z < 0$ using the spectral densities of the broken pair continuum. In section 3, we focus on the weak coupling limit $E_0 \ll \epsilon_F$, easier to reach in the ground state with BCS superconductors than with cold atoms, and which we treat mathematically by making E_0/ϵ_F tend to zero at $q\xi$ fixed. We find that the continuum collective branch is decoupled from the other excitations in the form of a modulus mode (bringing into play oscillations of the only modulus of the order parameter, excluding its phase), for the pure contact interaction (section 3.2.1) but also in the presence of the Coulomb interaction (section 3.2.2), with the same eigenvalue equation in both cases. The spectral densities useful for the analytic continuation can be expressed in terms of elliptic integrals (section 3.3). The branch is first calculated numerically, then studied analytically at low and at large $q\xi$ in section 3.4. To be complete, we perform the same study on the acoustic branch (phase mode) for a pure contact interaction in section 3.5. The long section 4 is devoted to the arbitrary interaction regime, appanage of the cold atom gases; the interaction is pure contact, and it is resonant (its scattering length a in the s wave greatly exceeds its range b in absolute value), which obliges to take the continuous limit $b \rightarrow 0$ of our lattice model: the eigenvalue equation is reduced to the determinant of a 2×2 matrix (section 4.1). Its analytic continuation is performed in the case $\mu > 0$ (where $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$) passing through the interval $[\epsilon_1, \epsilon_2]$, except in section 4.8. We give in section 4.2 the position on the positive real semi-axis of the branch points ϵ_1 , ϵ_2 , even ϵ_3 , as a function of q , and the expression of the spectral densities on each interval between the branch points and infinity. We enrich our study of the continuum branch (compared to section 3) by introducing into section 4.3 other observables than its complex dispersion relation $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$, namely its spectral weight (residue) on the small phase or modulus deviations from equilibrium of the order parameter, and the coherent superposition of these two channels making it possible to maximize the spectral weight in the experimental signal. We present a complete numerical study of the continuum branch in section 4.4, then carry out an analytical study at low q in section 4.5, specifying this time (at contrary to reference [3]) the domain of validity of the quadratic approximation, which shows the expected condition $q\xi \ll 1$ in the weak interaction regime but the other and non-intuitive condition $q/k_0 \ll (\mu/\Delta)^{1/2}$ in the regime $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ of vanishing chemical potential. In section 4.6, devoted to the weak interaction limit $\Delta/\mu \ll 1$, we need, to exhaust the problem, to study the branch successively at three wave number scales, at $q \approx 1/\xi$ i.e. $q \approx k_0\Delta/\mu$ (section 4.6.1), at $q \approx k_0$ (section 4.6.2) and at the unexpected scale $q \approx k_0(\Delta/\mu)^{2/3}$ governing the position of the minimum of $q \mapsto \text{Re } z_{\mathbf{q}}$ (section 4.6.3). In section 4.7, devoted to the inverse limit $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, it suffices to consider successively the scale $q \approx k_0$ (section 4.7.1) and the scale $q \approx k_0(\mu/\Delta)^{1/2}$ (section 4.7.2) for a full description. Finally, in section 4.8, we seek and sometimes find more exotic continuum modes by performing the analytic continuation for $\mu > 0$ through the other windows $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ and $[\epsilon_3, +\infty[$, and even extending the study to the case $\mu < 0$ (where $k_0 = 0$). We conclude in section 5.

2. Formalism reminders: model, linearized time-dependent BCS equations, spectral densities, analytic continuation

The model and formalism of this article are those of references [11, 12], the main lines of which we recall here. Fermions with two internal states \uparrow and \downarrow live with periodic boundary conditions in the quantization volume $[0, L]^3$ discretized into a cubic lattice of spacing b , in the grand-canonical ensemble of chemical potential $\mu = \mu_\uparrow = \mu_\downarrow$. The dispersion relation of a fermion alone on the lattice is that $\mathbf{k} \mapsto E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ of free space on the first Brillouin zone $\mathcal{D} = [-\pi/b, \pi/b]^3$ of the lattice, and is extended periodically beyond. Fermions of opposite spins undergo the binary contact interaction $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g_0 \delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} / b^3$, where δ is a Kronecker delta and the bare coupling constant is adjusted as a function of the lattice spacing to reproduce the desired scattering length a between fermions in the s wave: $1/g_0 = 1/g - \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}$ where $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ is the effective coupling constant [13].

Initially, the fermion gas is prepared in the ground state, unpolarized by symmetry between \uparrow and \downarrow . The state is described in an approximate variational manner by the usual BCS ansatz, coherent state of bound pairs $\uparrow\downarrow$ of particles $|\psi_{\text{BCS}}^{(0)}\rangle$ minimizing the energy. It has an order parameter Δ defined below and a pair-breaking quasiparticle excitation spectrum of the usual form $\epsilon_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}$, where \mathbf{k} spans \mathcal{D} and $\xi_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} - \mu + g_0\rho/2$ contains the grand-canonical energy shift and Hartree's mean field proportional to the total density ρ .

The gas is then subjected to an arbitrary external perturbation, except that it conserves the number of particles in \uparrow and in \downarrow , and that it is sufficiently weak so that one can limit its action, in the BCS variational framework, to creation of a coherent state of pairs of quasiparticles of weak amplitude $|\beta| \ll 1$. At times $t > 0$ after the perturbation, the gas state vector is therefore written

$$|\psi_{\text{BCS}}(t)\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left[- \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(t) \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle \quad (1)$$

where the operators of annihilation $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ and of creation $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ of a BCS quasiparticle of wave vector \mathbf{k} and spin σ obey the usual fermionic anticommutation relations. The independent variational parameters are the amplitudes of probability $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(t)$ to have broken a bound pair into two quasiparticles of opposite spins and wave vectors $\mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$; \mathbf{q} therefore represents the total (or center of mass) wave vector of the broken pair, and \mathbf{k} its internal (or relative) wave vector; $\mathcal{N}(t)$ is a normalization factor.

At order one in the amplitudes β , we extract from the ansatz (1) the expressions of the order parameter $\Delta(\mathbf{r}, t)$ and the total density $\rho(\mathbf{r}, t)$ of the gas excited at point \mathbf{r} and at time t :

$$\Delta(\mathbf{r}, t) \equiv g_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + O(\beta^2) \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \langle \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} V_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{q}} \delta\rho_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + O(\beta^2) \quad (3)$$

These are the variables through which the collective modes of the system can show up. In the right-hand side of these expressions appears first the constant contribution of the initial stationary state, function of the amplitudes $U_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 + \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ and $V_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 - \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ of the quasiparticle modes on particles and holes. Then come linear terms in β spatially modulated with the wave vectors \mathbf{q} of the pairs; their time dependence can be derived from that of $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$, itself deduced from the usual variational calculus. As in reference [11], it is clever to introduce partially decoupling linear plus and minus combinations of β and β^* ; here we only need their value at $t = 0^+$:

$$y_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm = \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(0^+) \pm \beta_{\mathbf{k}(-\mathbf{q})}^*(0^+) \quad (4)$$

which already gives access to the values of the Fourier amplitudes in equations (2, 3) just after the excitation:

$$\delta\Delta_{\mathbf{q}}(0^+) \mp \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(0^+) = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm y_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\mp \quad \text{and} \quad \delta\rho_{\mathbf{q}}(0^+) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^0 y_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ \quad (5)$$

The linearized motion equations of the variables $\beta \pm \beta^*$ are given in reference [11]. The added value here is to take the Laplace transform, to deduce that of the Fourier amplitudes in (2, 3) then, by inverse Laplace transformation, get

the time dependence of the latter:

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) - \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) + \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\rho_{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix} = \int_{i\eta+\infty}^{i\eta-\infty} \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-izt/\hbar}}{M(z, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} \Sigma_{W^+y^-}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^+y^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^-y^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^0y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^0y^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

different values of \mathbf{q} being decoupled by momentum conservation. The integral on z is taken in the complex plane by flying over the real axis ($\eta > 0$, even $\eta \rightarrow 0^+$). The integrand contains, in addition to the exponential oscillating at the complex angular frequency z/\hbar , a source vector with three components and the inverse of a 3×3 matrix, both functions of z . After passing to the thermodynamic limit $L \rightarrow +\infty$, we arrive at a compact writing, in particular

$$M(z, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \check{\Sigma}_{W^+W^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) & \Sigma_{W^+W^-}^z(z, \mathbf{q}) & -g_0 \Sigma_{W^+W^0}^z(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-W^+}^z(z, \mathbf{q}) & \check{\Sigma}_{W^-W^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) & -g_0 \Sigma_{W^-W^0}^z(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^0W^+}^z(z, \mathbf{q}) & \Sigma_{W^0W^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) & 1 - g_0 \Sigma_{W^0W^0}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M_{++}(z, \mathbf{q}) & M_{+-}(z, \mathbf{q}) & M_{+0}(z, \mathbf{q}) \\ M_{-+}(z, \mathbf{q}) & M_{--}(z, \mathbf{q}) & M_{-0}(z, \mathbf{q}) \\ M_{0+}(z, \mathbf{q}) & M_{0-}(z, \mathbf{q}) & M_{00}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

thanks to the short-hand notation of integrals on the internal wave vector \mathbf{k} of the pairs:

$$\Sigma_{ab}^z(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{z a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2}, \quad \Sigma_{ab}^\epsilon(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2}, \quad \check{\Sigma}_{ab}^\epsilon(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (8)$$

The version with accent $\check{\Sigma}$ contains a counter term $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$, obtained by eliminating g_0 in terms of the order parameter ($-1/g_0 = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}$), which provides ultraviolet convergence for the integral in the continuous limit $b \rightarrow 0$; versions without accent converge as is when $b \rightarrow 0$. Each symbol Σ displays under the integral sign the expected energy denominator, containing the energy $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ of the broken pair, and in the numerator coupling amplitudes between quasiparticles involving their modal amplitudes:

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \pm V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}, \quad W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^0 = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}, \quad \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \quad (9)$$

In matrix M , they appear by pairs of factors, which have the following more explicit expressions:

$$\begin{aligned} (W^+)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & W^+ W^- &= \frac{\xi_+}{2\epsilon_+} + \frac{\xi_-}{2\epsilon_-} & W^+ W^0 &= \frac{\Delta}{2\epsilon_+} + \frac{\Delta}{2\epsilon_-} \\ (W^-)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + \xi_+ \xi_- - \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & W^- W^0 &= \frac{(\xi_+ + \xi_-)\Delta}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & (W^0)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- - \xi_+ \xi_- + \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} \end{aligned} \quad (10)$$

where one introduced the short-hand notations $\epsilon_\pm = \epsilon_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$ and $\xi_\pm = \xi_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$. The whole (starting from equation (6)) constitutes a masterful generalization of equation (12) of reference [14] to a nonzero excitation wave vector \mathbf{q} and to an arbitrary infinitesimal non-polarizing perturbation of the initial stationary BCS state.

Equation (6) strongly evokes the formalism of Green's functions and of the resolvent. It is natural to apply the residue formula to it, that is to say Cauchy's theorem, by closing the integration path with a large half-circle in the lower complex half-plane, oriented counterclockwise and of divergent radius. As usual, the idea must be adapted to circumvent by an appropriate path the branch cuts resulting from vanishing denominators in the symbols Σ of (8) when z or $-z$ falls in the broken pair continuum $\{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$, or rather the *new* branch cuts obtained by deformation and rotation of the original branch cuts around their branch point (the new branch cuts are often arranged vertically in the lower half-plane), see supplement A_{III} of reference [15] and our figure 1; after bypassing a *new* branch cut, the integrand of (6) must of course be replaced by its analytic continuation from the upper half-plane to the lower half-plane across the moved *original* branch cut.

In the residue formula applied to (6) thus transformed, we associate by definition with each pole $z_{\mathbf{q}}$ of the integrand² a collective mode of eigenenergy $z_{\mathbf{q}}$, and the residue includes the exponential factor $\exp(-iz_{\mathbf{q}}t/\hbar)$, only dependent on time. As the matrix elements of M do not present a pole even after analytic continuation, nor the source

2. Given the even parity in z of $\det M(z, \mathbf{q})$, we agree that $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > 0$ in the definition of the complex energy of a mode.

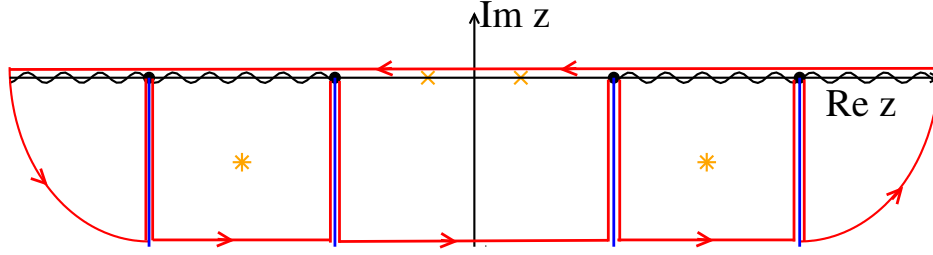


Figure 1: In the complex plane, integration path to follow and analytic continuations to be performed in order to be able to apply Cauchy's theorem to integral (6). We consider the case where the integrand has two branch points (black discs) on the positive real semi-axis, and two others on the negative real semi-axis taking into account the symmetry $z \leftrightarrow -z$. Its original branch cuts are shown with wavy lines. To fix the ideas, the branch cuts shifted by analytic continuation are arranged vertically in the form of half-lines (solid blue lines). The integration path, which bypasses them, is represented by the red arrow line. Orange stars: poles appearing in the analytic continuation (they are roots of $\det M_1(z, \mathbf{q})$ of integer degree). Orange cross: poles appearing on the real axis, without the need for analytic continuation (these are the roots of $\det M(z, \mathbf{q})$ of integer degree).

vector besides, and taking into account the writing of the inverse matrix $M^{-1} = {}^t\text{com } M / \det M$ in terms of the comatrix and its determinant, any pole can only come from $\det M$ (or its analytic continuation) vanishing with an integer power law in $z_{\mathbf{q}}$. There are therefore two possible cases: (i) the pole is located on the real axis, no analytic continuation is required, $z_{\mathbf{q}}$ is actually a real energy $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ and the mode is not damped, (ii) the pole is located in the lower complex half-plane, it was necessary to carry out an analytic continuation of $\det M$ to make it appear, $z_{\mathbf{q}}$ is complex ($\text{Im } z_{\mathbf{q}} < 0$) and the mode is damped exponentially. To find all the collective modes at wave vector \mathbf{q} , we must therefore solve the following two equations:

$$\boxed{\det M(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0, \quad \det M_{\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0} \quad (11)$$

the vertical arrow in the second equation representing the analytic continuation to $\text{Im } z < 0$. Note that, if the excitation of the gas is poorly chosen, it may be that the source vector in (6) or its analytic continuation vanishes at $z = z_{\mathbf{q}}$, in which case the residue of the integrand is zero at $z_{\mathbf{q}}$ and the mode is not expressed.

It remains to be seen how to carry out in practice the analytic continuation of the matrix elements of M to the lower half-plane. We can use [3] a result appearing in appendix C of [16], for any function $f(z)$ written as an integral on the real variable ϵ , with a energy denominator $z - \epsilon$ and a spectral density $\rho(\epsilon)$:

$$f(z) = \int_{\epsilon_a}^{\epsilon_b} d\epsilon \frac{\rho(\epsilon)}{z - \epsilon} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [\epsilon_a, \epsilon_b] \implies f_{\downarrow}(z) = f(z) - 2i\pi\rho(z) \quad \text{for } \text{Im } z \leq 0 \quad (12)$$

the analytic continuation taking place of course through the branch cut $[\epsilon_a, \epsilon_b]$ of $f(z)$, which it folds over $]-\infty, \epsilon_a] \cup [\epsilon_b, +\infty[$. For (12) to apply, the spectral density $\rho(\epsilon)$ must have an analytic continuation $\rho(z)$ in the lower half-plane, so that it be already analytical on the interval $[\epsilon_a, \epsilon_b]$. In practice, we are led to split the function to be continued into a sum of terms of type $f(z)$, the bounds ϵ_a, ϵ_b , etc. corresponding to the successive positions of the singularities of $\rho(\epsilon)$ on the real axis (points of divergence, discontinuity, kinks). In the case of matrix elements (8), this is done as in [3] using spectral densities³

$$\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q}) \equiv \int d^3k \frac{1}{2} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^s W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{s'} \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}) \quad \forall s, s' \in \{+, -, 0\} \quad (13)$$

which we will calculate in due course later.

3. Weak coupling limit $\Delta \ll \mu$: the case of BCS superconductors

3.1. Regime considered

In this section, the contact interaction between opposite spins fermions is very weakly attractive: its scattering length a is negative and very small in absolute value compared to the average distance between particles, or if we

3. So that $\rho_{ss'}$ is the spectral density of $M_{ss'}$ within the meaning of (12), a factor $(2\pi)^{-3}$ should be included in its definition. We did not do it here, so that the functions $\rho_{ss'}$ coincide with those of reference [3].

prefer compared to the inverse $1/k_F$ of the Fermi wave number of the gas, $k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}$. We can also suppose that $|a|$ is weaker than the spacing b of the lattice model, therefore than the interaction range: the binary interaction is non-resonant and in the Born regime of the scattering theory. We finally have the chain of inequalities $0 < -a \ll b \ll 1/k_F$.

It is under these conditions that BCS theory is most quantitative. It gives the right equation of state of the gas to order one in $k_F a$ and correctly takes into account Hartree's shift of the position k_0 of the minimum of the BCS excitation spectrum (see section 3.4.4 of [17] and reference [18]). In the chain of inequalities, the last ensures that physics is little affected by the discretization of space and makes it possible to replace the integration domain \mathcal{D} by \mathbb{R}^3 in (8); the penultimate makes it possible to replace the bare coupling constant g_0 by the effective constant $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ in the gas equation of state $\mu = \epsilon_F + g\rho/2$, in the BCS excitation spectrum $\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \epsilon_F)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ (hence the position of the minimum $k_0 = k_F$) and in the third column of matrix (7).

As the order parameter is exponentially small in the interaction strength, $\Delta/\epsilon_F \simeq 8e^{-2} \exp(-\pi/2k_F|a|)$ in BCS theory, we study in this section the continuum collective branch to leading order in Δ , i.e. we make Δ mathematically tend to zero after having performed the appropriate scale changes on the complex energy $z_{\mathbf{q}}$ and the wave number q ensuring the existence of a finite limit.

3.2. Decoupling of modulus mode

3.2.1. In the presence of a contact interaction

Before going to the mathematical limit $\Delta \rightarrow 0$, we must look at the continuum collective branch to the correct energy and wave number scales which are naturally the binding energy 2Δ and the inverse $1/\xi$ of the size $\xi \propto \hbar^2 k_0/m\Delta$ [19] of a bound pair of fermions $\uparrow\downarrow$, so keep the reduced variables constant

$$\bar{q} = \frac{\hbar^2 k_0 q}{m\Delta} \quad \text{and} \quad \bar{z} = z/\Delta \quad (14)$$

So, to obtain a nonzero limit in the matrix elements (7) of M , that is to say in integrals (8), it is necessary to make in spherical coordinates of polar axis \mathbf{q} the change of variable

$$k = k_0 + \frac{m\Delta}{\hbar^2 k_0} \bar{K} \quad (15)$$

on the modulus of the internal wave vector of the pairs and make Δ tend to zero at \bar{K} fixed. In other words, integrals (8) are dominated here by a thin layer of energy width $\propto \Delta$ around the Fermi surface of the gas.⁴ Let us first carry out the passage to the limit in the BCS excitation spectrum:

$$\xi_{\pm}/\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{\bar{K}, \bar{q} \text{ fixed}} \bar{K} \pm \frac{1}{2} \bar{q} u \equiv x_{\pm}(\bar{K}, u) \quad \text{and} \quad \epsilon_{\pm}/\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{\bar{K}, \bar{q} \text{ fixed}} (1 + x_{\pm}^2)^{1/2} \equiv e_{\pm}(\bar{K}, u) \quad (16)$$

u being the cosine of the angle between the vectors \mathbf{k} and \mathbf{q} , then in the integrals themselves in order to obtain their zero order approximation in Δ/μ , identified by the exponent (0):

$$\check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \left[\frac{(e_+ + e_-)(e_+ e_- + x_+ x_- + 1)}{2e_+ e_- [\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} + \frac{1}{2(\bar{K}^2 + 1)^{1/2}} \right] \neq 0 \quad (17)$$

$$\check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \left[\frac{(e_+ + e_-)(e_+ e_- + x_+ x_- - 1)}{2e_+ e_- [\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} + \frac{1}{2(\bar{K}^2 + 1)^{1/2}} \right] \neq 0 \quad (18)$$

$$\Sigma_{W^+W^-}^z(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{\bar{z}(x_+ e_- + x_- e_+)}{2e_+ e_- [\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \equiv 0 \quad (19)$$

$$\Sigma_{W^+W^0}^z(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{\bar{z}(e_+ + e_-)}{2e_+ e_- [\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \neq 0 \quad (20)$$

$$\Sigma_{W^-W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{(e_+ + e_-)(x_+ + x_-)}{2e_+ e_- [\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \equiv 0 \quad (21)$$

$$\Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{(e_+ + e_-)(e_+ e_- - x_+ x_- + 1)}{2e_+ e_- [\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \neq 0 \quad (22)$$

4. If we make $\Delta \rightarrow 0$ at fixed \mathbf{k} , with $q = O(\Delta)$ and $z = O(\Delta)$, the integrands of all Σ and $\check{\Sigma}$ tend to zero, which justifies this assertion and our procedure.

A simplification occurs: integrals (19) and (21) are identically zero by antisymmetry of their integrand under the exchange (K, u) to $(-K, -u)$, which transforms x_+ and x_- into their opposite but leaves e_+ and e_- unchanged. As a consequence, the second column of matrix M in (7) is reduced to its element on the diagonal and the first eigenvalue equation in (11) is split in two independent equations:

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \equiv \check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = 0 \quad \text{or} \quad \left[1 - g \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right] \check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) + g \left[\Sigma_{W^+W^0}^z(\bar{z}_q, \bar{q}) \right]^2 = 0 \quad (23)$$

The first relates only to the variable $-$, that is to say the second component of vector (6) of the collective variables, the linear combination of $\delta\Delta_{\mathbf{q}}$ and $\delta\Delta_{-\mathbf{q}}$ reconstructing the deviation of the modulus $|\Delta(\mathbf{r}, t)|$ of the order parameter from its equilibrium value. It will give birth, after analytic continuation and explicit calculation in section 3.4, to the continuum mode, which is therefore, in the weak coupling limit and at the energy scale Δ , a *modulus* mode. This result was known for a zero-range interaction between \uparrow and \downarrow ($b \rightarrow 0$) [2]; we see that it survives here at a nonzero range, even much greater than $|a|$. The second equation in (23) gives rise to the acoustic mode. It couples the variable $+$ (weak phase deviation of the order parameter from its equilibrium value) and the variable 0 (weak deviation of the gas density); it is only if we make g tend to zero, as in section 3.5, that the variable $+$ decouples from the density and that the acoustic mode becomes a pure *phase* mode as in [2].

3.2.2. In the presence also of the Coulomb interaction

In a BCS superconductor, the paired fermions are not neutral particles, but electrons of charge $-e$. We would therefore have to complete our model Hamiltonian, by adding to the short-range interaction b between \uparrow and \downarrow the long-range, spin-independent Coulomb interaction potential,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tilde{e}^2}{r} \quad (24)$$

therefore acting both between same-spin and opposite-spin particles. It would not be an easy task. Fortunately, the work has already been done in reference [2], in the limit where the range b tends to zero at fixed scattering length a of the short-range interaction. The eigenvalue equation on the energy z of the modes of wave vector \mathbf{q} takes the form of a determinant $\det \hat{K} = 0$, where \hat{K} is a 3×3 matrix which we do not write, but whose coefficients are expressed in terms of functions $A(\mathbf{q}, \pm z)$, $B(\mathbf{q}, z)$, $C(\mathbf{q}, z)$ and $D(\mathbf{q}, \pm z)$.⁵ Remarkably, we succeeded, after an integration at zero temperature on the Matsubara frequency not carried out in [2], to connect these functions of the Coulomb problem to the functions (8) of the non Coulomb problem as follows:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}, iz) &= \frac{1}{2} \left[\check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) + \check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \right] - \Sigma_{W^+W^-}^z(z, \mathbf{q}) & C(\mathbf{q}, iz) &= \frac{q^2}{4\pi} - 2\tilde{e}^2 \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \\ B(\mathbf{q}, iz) &= \frac{1}{2} \left[\check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) - \check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \right] & D(\mathbf{q}, iz) &= i\tilde{e} \left[\Sigma_{W^+W^0}^z(z, \mathbf{q}) - \Sigma_{W^-W^0}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

In addition, in the weak coupling limit, the eigenvalue equation decouples in the same way as in the non-Coulombian case (23):

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = 0 \quad \text{or} \quad \left[\frac{q^2}{8\pi\tilde{e}^2} - \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right] \check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) + \left[\Sigma_{W^+W^0}^z(\bar{z}_q, \bar{q}) \right]^2 = 0 \quad (26)$$

The first equation remains exactly the same: at the energy and wave number scales of (14), the continuum mode is therefore absolutely not affected by the Coulomb interaction to zeroth order in Δ . The second equation is deduced from that of (23) by the following substitution on the effective coupling constant:

$$g \rightarrow 2\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{8\pi\tilde{e}^2}{q^2} \quad (27)$$

⁵. Reference [2] wrongly states, after its equation (3.9), that $D(z, \mathbf{q})$ is an odd function of the quadrivector (z, \mathbf{q}) ; this is true only in the weak coupling limit at the scales of (14).

where $\tilde{V}(\mathbf{q})$ is the Fourier transform of $V(\mathbf{r})$. The interpretation is simple: g represents, in fact, the Fourier transform of the interaction potential at wave vector \mathbf{q} , which goes unnoticed for a zero-range interaction (the Fourier transform of a Dirac distribution is constant), but is obvious for the Coulomb interaction; the factor 2 takes into account the fact that $V(\mathbf{r})$ couples each spin state to the other two (unlike contact interaction); finally, g disappears completely in the substitution (27), instead of being simply supplemented by the term $2\tilde{V}(\mathbf{q})$, because the formalism of [2] is written in the zero range limit $b/|a| \rightarrow 0$, where the bare coupling constant g_0 appears instead of g as in the third column of (7) and tends to zero.

Result (26) was already in [2], but only up to $\bar{q} \lesssim 1$. Let us add that, to give it a precise mathematical meaning, the term $q^2/8\pi\bar{e}^2$ must remain constant when $\Delta \rightarrow 0$. It is therefore not enough to fix \bar{q} and \bar{z} as in (14), it is also necessary to fix the ratio $\hbar\omega_0/\Delta$ between the plasma angular frequency ω_0 of the Coulomb gas in its normal phase (see equation (3.8) of reference [2]) and its order parameter Δ in the ground state. We have

$$\frac{q^2}{8\pi\bar{e}^2} = \frac{2\bar{q}^2}{3} \frac{\Delta^2}{(\hbar\omega_0)^2} \frac{mk_F}{(2\pi\hbar)^2} \quad \text{with} \quad \frac{(\hbar\omega_0)^2}{\Delta^2} \equiv \frac{4\pi\hbar^2\bar{e}^2\rho/m}{\Delta^2} \quad (28)$$

3.3. Analytical expression of spectral densities

3.3.1. The spectral density $\rho_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$

To determine the dispersion relation of the modulus mode, that is to say the continuum collective branch, we must calculate the function $M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$ appearing in (23, 26) and find its roots after analytic continuation to the lower half-plane. We need for that, see the procedure (12), to know the associated spectral density (13), with $s = s' = -$, in the weak coupling limit. As in section 3.2.1, we make Δ tend to zero in $\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{q})$ by fixing the reduced energy $\bar{\epsilon} = \epsilon/\Delta$ and the reduced wave numbers \bar{q} and \bar{K} of equations (14, 15), and obtain the finite limit

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{\pi mk_0}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{e_+ e_- + x_+ x_- - 1}{2e_+ e_-} \delta(e_+ + e_- - \bar{\epsilon}) \quad (29)$$

Thanks to Dirac's distribution δ fixing the total energy in the integrand, it is possible to integrate explicitly at least once by solving the equation $e_+ + e_- = \bar{\epsilon}$, for example on the variable \bar{K} , as it is done in [Appendix A.1](#):

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = \frac{2\pi mk_0}{\hbar^2} \int_0^1 du \Theta(\bar{\epsilon}^2 - (4 + u^2\bar{q}^2)) \left(\frac{4 + u^2\bar{q}^2 - \bar{\epsilon}^2}{u^2\bar{q}^2 - \bar{\epsilon}^2} \right)^{1/2} \quad (30)$$

where Θ is the Heaviside function. To carry out the remaining angular integral, we must distinguish three cases according to the value of $\bar{\epsilon}$: (i) the argument of Θ is negative over the whole integration interval, (ii) it changes sign in the interior of the interval, and (iii) it is positive over the entire interval. At the boundary energies between these cases, the spectral density has a kink. The three corresponding analytical expressions are different, and are identified by exponents in Roman numerals, see table 1.

Let us take advantage of our knowledge of the spectral density to express the function $M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$ in the convenient form of a single integral on energy. The presence of the counter-term in integral (18) ensuring its ultraviolet convergence poses a small technical difficulty. We get around it by introducing an arbitrarily large cut-off on \bar{K} , which allows us to separate the counter-term and to express the rest as an integral with an energy cut-off; we subtract from the whole the quantity $M_{--}^{(0)}(2, 0)$, transformed beforehand in the same way, then we make the cut-off tend to infinity. Now $M_{--}^{(0)}(2, 0) = 0$, taking into account the exact relation (53) to come. There remains therefore

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = (2\pi)^{-3} \int_2^{+\infty} d\bar{\epsilon} \left[\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{\bar{z} + \bar{\epsilon}} \right) - \rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) \left(\frac{1}{2 - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{2 + \bar{\epsilon}} \right) \right] \quad (31)$$

where the spectral density at zero wave number, taken for example from table 1 by making \bar{q} tend to zero over the interval III, is simply equal to

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) = \frac{2\pi mk_0}{\hbar^2} \Theta(\bar{\epsilon} - 2) \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \quad (32)$$

$\bar{\epsilon} < 2$	$\rho_{--}^{(0)\text{II}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = 0$ $\rho_{++}^{(0)\text{II}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = 0$
$2 < \bar{\epsilon} < (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$	$\rho_{--}^{(0)\text{II}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) - \frac{2}{\bar{q}\bar{\epsilon}} K \left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$ $\rho_{++}^{(0)\text{II}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$
$(4 + \bar{q}^2)^{1/2} < \bar{\epsilon}$	$\rho_{--}^{(0)\text{III}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) - \frac{2}{\bar{q}\bar{\epsilon}} F \left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$ $\rho_{++}^{(0)\text{III}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$

Table 1: Spectral densities -- and ++ in the weak coupling limit. We took the limit $\Delta/\mu \rightarrow 0$ at fixed reduced energy $\bar{\epsilon} = \epsilon/\Delta$ and reduced wave number $\bar{q} = \hbar^2 k_0 q/m\Delta$, k_0 being the position of the minimum Δ of the BCS dispersion relation. On each energy interval considered, these are regular functions, that can be analytically continued to complex energies. $E(\phi, k)$ and $F(\phi, k)$ are the elliptical integrals of second and first kind, in the definition §8.111 of reference [20]; $E(k) \equiv E(\pi/2, k)$ and $K(k) \equiv F(\pi/2, k)$ are their full forms.

3.3.2. Spectral density $\rho_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$

To determine the dispersion relation of the phase mode of the gas of neutral particles, that is to say the acoustic branch after taking the limit $g \rightarrow 0$ in the second equation of (23), we need calculate the function $M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \tilde{\Sigma}_{W+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q})$. No analytic continuation is required, but knowledge of the associated spectral density $\rho_{++}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q})$ leads us to a single integral on energy, rather than the double integral (17). We therefore proceed as in section 3.3.1 to obtain

$$M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = (2\pi)^{-3} \int_2^{+\infty} d\bar{\epsilon} \left[\rho_{++}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{\bar{z} + \bar{\epsilon}} \right) - \rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) \left(\frac{1}{2 - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{2 + \bar{\epsilon}} \right) \right] \quad (33)$$

The analytical expression of the spectral density ++ for arbitrary \bar{q} appears in table 1, that -- for $\bar{q} = 0$ appears in (32), and we have as in (31) used the intermediate point $(\bar{z}, \bar{q}) = (2, 0)$ where $M_{--}^{(0)}$ vanishes, to make the counter-term of integral (17) disappear in the difference $M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - M_{--}^{(0)}(2, 0)$.

3.4. Study of the modulus excitation branch

The first equation of (23) and (26) has no solution on the real axis. We therefore carry out the analytic continuation to the lower complex half-plane, passing here between its branch points $\bar{z} = 2$ and $\bar{z} = (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$, that is to say using, in the sense of table 1, the type II expression of the spectral density -- in the Nozières term from (12). So we have to look for solutions $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ of < 0 imaginary part of the equation

$$M_{--\downarrow\text{II}}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) = 0 \quad (34)$$

with

$$M_{--\downarrow\text{II}}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - (2\pi)^{-3} 2i\pi \rho_{--}^{(0)\text{II}}(\bar{z}, \bar{q}) \quad (35)$$

3.4.1. Numerical results

The numerical solution of equation (34) is easy, if we use a certain formal calculation software, in which numerical integration, evaluation of elliptical integrals and the search for roots of a function of the complex variable were preprogrammed. The result is presented in solid line in figure 2a for the real part and in figure 2b for the imaginary part of the continuum collective branch. As a function of the reduced wave number \bar{q} , the imaginary part is monotonically decreasing and seems to tend asymptotically to $-\infty$. The real part has a more interesting structure: starting from 2^+ (which corresponds to the expected unreduced eigenenergy $2\Delta^+$),⁶ it goes through a maximum $\text{Re } \bar{z} \simeq 2.158$ at $\bar{q} \simeq 3.403$ before decreasing and, it seems, tending to zero at infinity.

6. We write 2^+ because the continuum collective mode disappears at $q = 0$, see [3] and references cited.

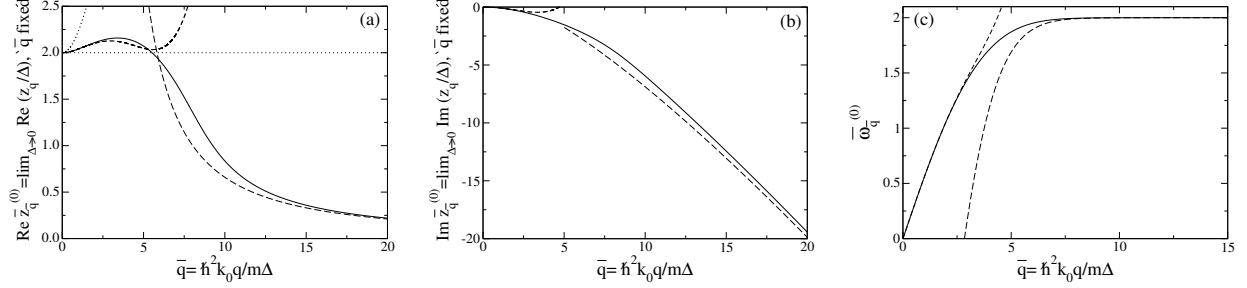


Figure 2: In the weak coupling limit $\Delta/\mu \rightarrow 0$, real part (a) and imaginary part (b) of the complex eigenenergy z_q of the continuum collective branch, i.e. of the modulus mode, of an unpolarized gas of spin 1/2 fermions, as functions of the wave number q . The rescaling of q and z_q into \bar{q} and \bar{z}_q according to equation (14) ensures that \bar{z}_q has a finite limit $\bar{z}_q^{(0)}$ when $\Delta/\mu \rightarrow 0$ at fixed \bar{q} . Solid line: numerical calculation of the root of function (35) in the lower complex half-plane. Short dashed line: Taylor expansion (38) of order 4 at low \bar{q} . Long dashed line: asymptotic expansion (43) with large \bar{q} , limited to leading order \bar{q} for the imaginary part and $1/\bar{q}$ for the real part. Dotted lines in (a): lower $\bar{\epsilon}_1^{(0)}(\bar{q}) = 2$ and upper $\bar{\epsilon}_2^{(0)}(\bar{q}) = (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$ bounds of the energy interval which we have passed to analytically continue the equation on $\bar{z}_q^{(0)}$ in (35); it is also the window for direct observability of the mode in the gas response functions [3]. These results are valid at zero temperature for a contact interaction in the s wave, as in neutral particle superfluids, to which the Coulomb interaction can be added, as in the purely electronic BCS superconductors. We give in (c) the acoustic branch, that is to say the phase mode dispersion relation, in a superfluid of neutral fermions, obtained by numerically solving the second equation in (23) at order 0 in the coupling constant g , i.e. the equation $M_{++}^{(0)}(\bar{\omega}_q^{(0)}, \bar{q}) = 0$ of unknown $\bar{\omega}_q^{(0)} \in [0, 2]$; no analytic continuation is required. The short and long dashed lines correspond to the low and large \bar{q} approximations in (47). Here, the position of the minimum of the BCS dispersion relation ϵ_k is $k_0 = k_F$, the Fermi wave number of the gas.

We also went in search of a type III continuum branch, analytically continuing the eigenenergy equation from the upper half-plane to the lower half-plane via the energy interval $[(4 + \bar{q}^2)^{1/2}, +\infty[$. To do this, we replace $\rho_{--}^{(0)[\text{III}]}$ with $\rho_{--}^{(0)[\text{III}]}$ in (34, 35), where the notations are those of table 1. However, we did not find a solution. It seems indeed that $\text{Im } M_{--\downarrow[\text{III}]}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) < 0$ all over the interior of the fourth quadrant of the complex plane ($\text{Re } \bar{z} > 0$ and $\text{Im } \bar{z} < 0$), for all \bar{q} .⁷

3.4.2. Analytical results at low \bar{q}

To analytically determine the behavior of the continuum collective branch with low reduced wave number, we parametrize its eigenenergy as in reference [3], i.e. we set

$$\bar{z} = 2 + \frac{\zeta}{4}\bar{q}^2 \quad (36)$$

in function (35) then we make \bar{q} tend to zero with a fixed coefficient ζ in the lower complex half-plane. From the integral form (31) and from the expression of the spectral density -- in table 1, we get⁸

$$M_{--\downarrow[\text{III}]}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\zeta \text{ fixed, Im } \zeta < 0}{\underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=}} \frac{4\pi m k_0}{(2\pi)^3 \hbar^2} \left\{ i \frac{\pi}{8} \bar{q} \left(\sqrt{\zeta - 1} + \zeta \arcsin \frac{1}{\sqrt{\zeta}} - \pi \zeta \right) + \bar{q}^2 \left(\frac{\zeta}{4} - \frac{1}{12} \right) + \frac{i\pi \bar{q}^3}{256} \left[\left(\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta^2 - (5\zeta - 2) \sqrt{\zeta - 1} \right] \right\} + O(\bar{q}^4) \quad (37)$$

7. We checked it analytically at the edges of the domain, at infinity ($|\bar{z}| \rightarrow +\infty$ at fixed phase) and for $\bar{q} \rightarrow +\infty$ at fixed \bar{z} or at fixed \bar{z}/\bar{q} .

8. In (31), we first change the variable $\bar{e} = 2 \text{ch } \Omega$. We then distinguish the intervals $\Omega \in [0, A\bar{q}/2]$ and $\Omega \in [A\bar{q}/2, +\infty[$, where $A \gg 1$ is arbitrary. On the first interval, we change the variable $\Omega = x\bar{q}/2$ then we expand the integrand in powers of \bar{q} at fixed x , by separating the cases $x < 1$ and $x > 1$. On the second interval, we expand the integrand in powers of \bar{q} at fixed Ω . In the final result, we collect the terms order by order in \bar{q} and we make A tend to $+\infty$ in the coefficients. It remains to calculate some integrals of the form $\int dx \sqrt{x^2 - 1} x / (x^2 - \zeta)^n$ or $\int dx \arcsin(1/x) x / (x^2 - \zeta)^n$, $n \in \{0, 1, 2\}$. For example, $\int_1^{+\infty} dx \arcsin(1/x) x / (x^2 - \zeta) = -(\pi/4) \ln(1 - 1/\zeta) - (i\pi/2) \arcsin(1/\sqrt{\zeta})$ ($\text{Im } \zeta < 0$) knowing that $\arcsin z = -i \ln(\sqrt{1 - z^2} + iz)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$.

where the arrow reminds us that the analytic continuation has been made. It remains to replace ζ by a Taylor expansion in powers of \bar{q} , whose successive coefficients are determined by canceling the right-hand side of (37) order by order. The result,

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)} = 2 + \frac{1}{4}\bar{q}^2 \left[\zeta_0 + \zeta_1 \bar{q} + \zeta_2 \bar{q}^2 + O(\bar{q}^3) \right] \quad \text{with} \quad \begin{cases} \zeta_0 = \sqrt{\zeta_0 - 1}/(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}) \simeq 0.236883 - 0.295632i \\ \zeta_1 = 2i\zeta_0(1 - 3\zeta_0)/(3\pi\sqrt{\zeta_0 - 1}) \simeq -0.081630 - 0.014462i \\ \zeta_2 = \frac{\zeta_0^2(1 - 3\zeta_0)(\zeta_0 - 11/9)}{\pi^2(\zeta_0 - 1)^2} + \frac{\zeta_0(1 - 2\zeta_0)}{16} \simeq 0.007158 + 0.016367i \end{cases} \quad (38)$$

shown in short dashed lines in figures 2a and 2b, qualitatively accounts for the existence of a maximum on the real part of the branch. The value of ζ_0 was already included in references [2] and [3]. It is interesting to note that expansion (38) has a nonzero cubic term, unlike the acoustic branch, see reference [21] and our equation (47) to come from which it is obtained.

3.4.3. Analytical results for a large \bar{q}

To analytically determine the behavior of the continuum collective branch for a large reduced wave number, we postulate a quasi-linear divergence of $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ (in fact only of its imaginary part, see below). We therefore set

$$\bar{z} = \mathcal{Z}\bar{q} \quad (39)$$

in function (35) and make \bar{q} tend to infinity with a fixed coefficient \mathcal{Z} in the lower half-plane. From the integral form (31) and from the expression of the spectral density -- in table 1, we derive the asymptotic expansion⁹

$$M_{--|\text{III}}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{\stackrel{\mathcal{Z} \text{ fixed, Im } \mathcal{Z} < 0}{\simeq}} \frac{4\pi mk_0}{(2\pi)^3 h^2} \left[\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q}) + \frac{1}{\bar{q}^2} \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q}) + o\left(\frac{1}{\bar{q}^2}\right) \right] \quad (40)$$

with coefficients that remarkably, depend slowly (logarithmically) on \bar{q} :

$$\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q}) = \ln\left(\frac{2\bar{q}}{e}\right) - \frac{i\pi\mathcal{Z}}{2} + \frac{1 - \mathcal{Z}}{2} \ln \frac{1 - \mathcal{Z}}{2} + \frac{1 + \mathcal{Z}}{2} \ln \frac{1 + \mathcal{Z}}{2} \quad (41)$$

$$\mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q}) = \frac{1}{2\mathcal{Z}} \left[g_2\left(\frac{\mathcal{Z} - 1}{\mathcal{Z} + 1}\right) - g_2\left(\frac{\mathcal{Z} + 1}{\mathcal{Z} - 1}\right) - \ln(4e\bar{q}^2) \left(\ln \frac{1 + \mathcal{Z}}{2} - \ln \frac{1 - \mathcal{Z}}{2} - i\pi \right) + 2g_2\left(\frac{1}{\mathcal{Z}}\right) - 2g_2\left(-\frac{1}{\mathcal{Z}}\right) + 4i\pi \ln \mathcal{Z} \right] \quad (42)$$

where $g_\alpha(z)$ is a Bose function or polylogarithm. From the cancellation of the right-hand side of (40) order by order in \bar{q} , we therefore deduce an asymptotic expansion

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{\simeq} \mathcal{Z}_0 \bar{q} + \frac{\mathcal{Z}_2}{\bar{q}} + o\left(\frac{1}{\bar{q}}\right) \quad (43)$$

whose coefficients also depend logarithmically on \bar{q} . As one would expect from figures 2a and 2b, the coefficient of the dominant term is pure imaginary:

$$\mathcal{Z}_0 = -iY_0 \quad \text{with} \quad \ln\left(\bar{q} \sqrt{1 + Y_0^2}/e\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0\right) Y_0 \quad (44)$$

9. We start by assuming that $\text{Im } \mathcal{Z} > 0$. In the integral expression (31), we change the variable $\bar{e} = \bar{q}x$ then we expand the integrand in powers of $1/\bar{q}$ at fixed x , distinguishing the cases $x < 1$ and $x > 1$. In the first case, $\rho_{--}^{(0)}(\bar{q}x, \bar{q}) = \frac{2\pi mk_0}{h^2} \left[x - \frac{1}{\bar{q}^2 x} \ln(4e\bar{q}^2 x^2) + o(1/\bar{q}^2) \right]$; in the second, $\rho_{--}^{(0)}(\bar{q}x, \bar{q}) = \frac{2\pi mk_0}{h^2} \left[1 + \frac{1}{\bar{q}^2 x} \ln \frac{x-1}{x+1} + o(1/\bar{q}^2) \right]$; these expansions are taken from form (30), considering when $x < 1$ the intervals $u \in [0, xA/\bar{q}^2]$ and $u \in [xA/\bar{q}^2, (x^2 - 4/\bar{q}^2)^{1/2}]$ where $A \rightarrow +\infty$ after expansion in $1/\bar{q}$. We come across the integrals $I = \int_0^1 dx \frac{\ln x}{x^2} = g_2(1/\mathcal{Z})$ and $J = \int_1^{+\infty} dx \ln[(x-1)/(x+1)]/(x^2) = g_2((\mathcal{Z}+1)/(\mathcal{Z}-1)) - g_2(1)$ (we made in J the change of variable $X = (x-1)/(x+1) \in [0, 1]$ then we performed a partial fraction decomposition). The final result is analytically continued from $\text{Im } \mathcal{Z} > 0$ to $\text{Im } \mathcal{Z} < 0$ through $[0, 1]$ by the substitution $g_2(1/\mathcal{Z}) \rightarrow g_2(1/\mathcal{Z}) + 2i\pi \ln \mathcal{Z}$, while $g_2(-1/\mathcal{Z})$, $g_2((\mathcal{Z}-1)/(\mathcal{Z}+1))$ and $g_2((\mathcal{Z}+1)/(\mathcal{Z}-1))$ remain unchanged since $g_2(z)$ has $[1, +\infty[$ as branch cut; similarly, the cleverly introduced functions $\ln(1 \pm \mathcal{Z})$ remain unchanged.

We don't know how to solve the transcendental equation on the imaginary part $Y_0 > 0$ other than numerically.¹⁰ The corresponding prediction is shown in long dashed lines in figure 2b. In the sub-leading term, the real part is the most physically interesting part, because it provides an equivalent of the real part of the continuum collective branch. Luckily, it is also the simplest one to write, since only the imaginary part of $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q})$ takes a simple form on the pure imaginary axis:

$$\text{Im } \mathcal{M}_2(-iY, \bar{q}) = \frac{\pi^2}{Y} \quad \forall Y > 0 \quad \text{then} \quad \text{Re } \mathcal{Z}_2 = \frac{\pi^2}{\left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0\right) Y_0} \quad (45)$$

The result, tending to zero as $1/\bar{q}$ up to a logarithmic factor, is shown in long dashed lines in figure 2a.

3.5. Acoustic branch for a contact interaction in the limit $g \rightarrow 0$

As we know, our neutral fermion gas has an acoustic excitation branch $q \mapsto \hbar\omega_{\mathbf{q}}$, purely real in the time-dependent linearized BCS formalism used here, and extensively studied in reference [1]. We consider it useful, however, to give some additional results in the weak coupling limit, where it can be rescaled as the continuum collective branch:

$$\frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{\Delta} \xrightarrow[\bar{\Delta} \rightarrow 0]{\bar{q} \text{ fixed}} \bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} \quad (46)$$

and where it solves the second equation of (23). To simplify, let us neglect in the latter the small corrections proportional to the effective coupling constant g . Then $\bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)}$ is a root of $\bar{z} \mapsto M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$, without any need for analytic continuation (unlike the case at nonzero temperature, where the branch cut on the eigenenergy equation reaches zero energy, and where up to four complex acoustic branches can be found [22, 23]). By numerical solution, we plot the acoustic branch in figure 2c: after a linear start in the reduced wave number, it saturates quickly (faster than a power law) to the reduced value 2, that is, to the energy 2Δ of the lower edge of the broken pair continuum. On the same figure are shown with a dashed line the analytical predictions

$$\bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} \frac{\bar{q}}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{\bar{q}^2}{45} + \frac{17\bar{q}^4}{28350} + O(\bar{q}^6) \right] \quad \text{and} \quad \bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} - 2 \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{\sim} -16e^{-2} \exp[-(2\bar{q}/\pi) \ln(\bar{q}/e)] \quad (47)$$

The one at low \bar{q} is taken from reference [21]. The one at large \bar{q} is original: we deduce it from the integral form (33) of $M_{++}^{(0)}$.¹¹

4. Arbitrary interaction regime: the case of cold atoms in the BEC-BCS crossover

In a cold atom gas, opposite spins fermions are subject to short-range van der Waals interactions, of scattering length a virtually adjustable between $-\infty$ and $+\infty$ by Feshbach resonance. In the case $a < 0$, however, the gases are always prepared in the strong interaction regime $1 \lesssim k_{\text{F}}|a|$, which alone ensures an accessible reduced critical temperature for superfluidity T_c/T_{F} (we hardly know how to cool these gases in a controlled manner below $T = 0.05T_{\text{F}}$, where T_{F} is the Fermi temperature [9, 24]). This contrasts with the weak interaction limit $k_{\text{F}}|a| \ll 1$ in section 3. The ground state of the gas remains qualitatively the same, that is to say a condensate of $\uparrow\downarrow$ pairs bound by the Cooper mechanism in the presence of Fermi seas, but BCS theory becomes less quantitative. In addition, under pain of having heavy three-body losses, the experiments do not leave the dilute regime $k_{\text{F}}b \ll 1$, where b is the interaction range¹²; this condition, joined to $1 \lesssim k_{\text{F}}|a|$, now imposes that $|a| \gg b$: the interaction becomes resonant in the s wave. In the case $a > 0$, there exists for $b \lesssim a$ a dimer $\uparrow\downarrow$ of characteristic diameter a in free space and the bound

10. By committing a relative error $O(1/Y_0^3)$ on Y_0 , we can replace the equation by $\pi Y_0 = \ln(\bar{q}Y_0)$ whose solution is $Y_0 = (-1/\pi)W_{-1}(-\pi/\bar{q})$ where W_{-1} is the secondary branch of the Lambert function W .

11. To do this, we had to overcome a non-trivial integral, $\int_0^1 dx \frac{E(x)-E(0)-x^2[E(1)-E(0)]}{x(1-x^2)^{3/2}} = \int_0^1 du \frac{E(u')-E(1)}{u^2} + \int_0^1 du \frac{E(u')-E(0)}{1-u^2} = 1 + \frac{\pi}{2}(\ln 2 - 1)$ where we made the change of variable $x = u'$, with the notation $u' = (1-u^2)^{1/2}$ as in §8.111 of reference [20].

12. We limit here, as in most experiments, to a broad magnetic Feshbach resonance, where the true range b and the effective range r_e are of the order of the van der Waals length $\ell = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$, unlike narrow resonances for which $-r_e \gg b \approx \ell$.

pairs can be formed independently of the existence of Fermi seas; at sufficiently low density, the average distance between fermions is $\gg a$ and the ground state of the gas tends to a Bose-Einstein condensate (BEC) of dimers. Even in this case, the experiments are limited to the resonant regime $a \gg b$, otherwise the dimer gas would have a short lifetime under the effect of three-body losses.¹³ In practice, experimental studies focus on the crossover between the two limiting cases BCS $k_F a \rightarrow 0^-$ and BEC $k_F a \rightarrow 0^+$, in the crossing interval $-1 \lesssim 1/k_F a \lesssim 1$ made non trivial by the interaction strength and made universal by the condition everywhere satisfied $|a| \gg b$ [26, 27, 28].

In our model, the interaction range is represented by the spacing b of the cubic lattice. The resonant scattering condition $|a| \gg b$ (knowing that we always have $k_F b \ll 1$) therefore allows us to take the continuous limit $b \rightarrow 0$, which brings some welcome simplifications (section 4.1). The resulting spectral densities can be calculated analytically (section 4.2). After having presented observables of the continuum mode complementary to its dispersion relation (section 4.3), we carry out a numerical study (section 4.4), then a detailed analytical study by successively considering the limit of low wave numbers (section 4.5), that of a weak order parameter $\Delta/\mu \ll 1$ (section 4.6) and that of a weak and positive chemical potential $\Delta/\mu \gg 1$ (section 4.7). All these results on the continuum collective branch are obtained for $\mu > 0$, where the BCS excitation spectrum $\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ reaches its minimum at the nonzero wave number $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, and by analytic continuation of the eigenenergy equation through the natural window delimited by its first two branch points $\epsilon_1(q)$ and $\epsilon_2(q)$, which imposes $0 < q < 2k_0$ [3]. We generalize however the study in section 4.8 by carrying out an analytic continuation through the other windows (of energy higher than $\epsilon_2(q)$) and by considering the case $\mu < 0$ where the BCS spectrum is minimal at $k = 0$.

4.1. Continuous or zero-range limit $b \rightarrow 0$

Let us make the spacing b of the lattice model tend to zero at fixed scattering length a . We can first replace the first Brillouin zone \mathcal{D} by \mathbb{R}^3 in the integrals Σ of (8); they were built to have a finite value in this limit. We then notice, on its expression given at the beginning of section 2, that the on-site coupling constant g_0 tends to zero. We can therefore replace g_0 by zero in the third column of matrix M in equation (7), which greatly simplifies the writing of the determinant of M in the eigenenergy equation (11):

$$\det M(z, \mathbf{q}) = M_{++}(z, \mathbf{q})M_{--}(z, \mathbf{q}) - [M_{+-}(z, \mathbf{q})]^2 \quad (48)$$

where M_{ss} are the diagonal elements and $M_{+-} = M_{-+}$ the non-diagonal elements of the upper left 2×2 block of M .¹⁴ For the same reason, the inverse M^{-1} appearing in time dependence (6) of collective variables is simplified: small phase and modulus deviations from equilibrium of the order parameter only depend on the first two components of the source vector of (6), which allows, without taking up too much space, to give the inspiring writing displaying the determinant of M in the denominator:

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) - \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) + \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \end{pmatrix} = \int_{i\eta+\infty}^{i\eta-\infty} \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-izt/\hbar}}{\det M(z, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} M_{--}(z, \mathbf{q}) & -M_{+-}(z, \mathbf{q}) \\ -M_{+-}(z, \mathbf{q}) & M_{++}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{W^+y^-}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^+y^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^-y^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (49)$$

On the other hand, the small density deviation $\delta\rho_{\mathbf{q}}(t)$ depends on the three components of the source vector and involves other matrix elements of M than those of (48); for simplicity, we will therefore not study it here, although it is more directly measurable than the deviations of the order parameter.

For the numerical and analytical studies to come, it is advisable to express the useful matrix elements of M in terms of the corresponding spectral densities (13), these being anyway required by the Nozières analytic continuation (12). It is straightforwardly done in the case of M_{+-} : it is enough to insert in the integrand (8) of $\Sigma_{W^+W^-}^z$ the integral of $\delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ on all energies $\epsilon \geq 2\Delta$, which is obviously equal to unity, then exchange the integration on the wave vector \mathbf{k} and on ϵ to reveal the spectral density ρ_{+-} as in (13). We get

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \rho_{+-}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} + \frac{1}{z + \epsilon} \right) \quad (50)$$

13. The elastic collision rate would become lower than the inelastic rate, which would compromise evaporative cooling [25].

14. Equation (48) is already in [1]. It is also equivalent, given the identities (25), to the zero temperature limit of equation (2.6) of [2], except that this reference approximates the chemical potential μ by Fermi energy ϵ_F in the BCS dispersion relation.

The case of the diagonal elements M_{ss} , $s = \pm$, is made more delicate by the necessary presence of the counter term $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$; before applying the same procedure as for M_{+-} , we therefore introduce an arbitrarily large cut-off A on the energy $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ of a broken pair, using a factor $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ (Θ is the Heaviside function), then we separate the counter-term from the rest. In the rest, we use a minus-plus trick, taking advantage of the fact that the spectral densities $\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q})$ are equivalent at high energy to $\rho_{\infty}(\epsilon) = \pi(m/\hbar^2)^{3/2}\epsilon^{1/2}$, proportional to the density of states of a free particle of mass $m/2$.¹⁵ It finally comes:

$$M_{ss}(z, \mathbf{q}) = \frac{C(\Delta)}{(2\pi)^3} + (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} - \frac{1}{z + \epsilon} \right) + \frac{2}{\epsilon} \rho_{\infty}(\epsilon) \right], \quad \forall s \in \{+, -\} \quad (51)$$

In the regularization scoria

$$C(\Delta) = 4\rho_{\infty}(2\Delta) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}} - \frac{2m}{\hbar^2 k^2} \right) = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \Delta^{1/2} [1 + I_1(\mu/\Delta)] \quad (52)$$

appears an integral on \mathbf{k} already calculated analytically in [19], see the function $I_1(\mu/\Delta)$ of this reference, but of which we give here, by hyperbolic parametrization, the more compact expression $I_1(\text{sh } \tau) = \text{ch } \tau (2e^\tau)^{1/2} K(\text{ie}^\tau) - (2e^{-\tau})^{1/2} E(\text{ie}^\tau)$, where E and K are the complete elliptical integrals of second and first kind as in §8.112 of reference [20]. To be complete, let us note that a more beautiful form, without regularization scoria but with a more elaborate counter-term, is easily deduced from identities¹⁶

$$M_{++}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = M_{--}(2\Delta, \mathbf{0}) = 0 \quad (53)$$

Just subtract from (51) with $s = +$ its value for $(z = 0, \mathbf{q} = \mathbf{0})$, which is zero, and from (51) with $s = -$ its value for $(z = 2\Delta, \mathbf{q} = \mathbf{0})$, also zero, to obtain

$$M_{++}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{++}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} - \frac{1}{z + \epsilon} \right) + \frac{2}{\epsilon} \rho_{++}(\epsilon, \mathbf{0}) \right] \quad (54)$$

$$M_{--}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} - \frac{1}{z + \epsilon} \right) - \rho_{--}(\epsilon, \mathbf{0}) \left(\frac{1}{2\Delta - \epsilon} - \frac{1}{2\Delta + \epsilon} \right) \right] \quad (55)$$

The spectral densities have a simple analytic expression at zero vector wave,¹⁷ but much less simple at nonzero \mathbf{q} as it will appear in the next section 4.2.

4.2. Analytical computation of spectral densities

4.2.1. Non-analyticity points $\epsilon_1(q)$, $\epsilon_2(q)$ and $\epsilon_3(q)$

To perform the analytic continuation of the matrix elements $M_{ss'}(z, \mathbf{q})$ as in (12), we must first find the points of non-analyticity in ϵ of the corresponding spectral densities $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ on the real axis. This work was carried out qualitatively in reference [3] and the physical origin of these points was explained. We therefore give here a purely quantitative discussion.

Let's start with the richest case, $\mu > 0$ and $0 < q < 2k_0$, with $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ here, which has two or three points of non-analyticity. The extreme points are given by

$$\epsilon_1(q) = 2\Delta \quad \text{and} \quad \epsilon_3(q) = 2\epsilon_{\mathbf{q}/2} = 2 \left[\left(\frac{\hbar^2 q^2}{8m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} \quad (56)$$

15. Asymptotically, the introduction of the factor $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ amounts to cutting the wave number k or the kinetic energy $E_{\mathbf{k}}$ since $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = 2E_{\mathbf{k}} + O(1)$ when $k \rightarrow +\infty$. Since the weights $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm$ tend to 1 in this limit, with a difference $O(1/k^4)$, we deduce that $\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q}) \sim \rho_{\infty}(\epsilon)$ as advertised. In the integral on ϵ still cut-off at A by the factor $\Theta(A - \epsilon)$, we subtract from the integrand its equivalent $(-2/\epsilon)\rho_{\infty}(\epsilon)$, which allows us to take the limit $A \rightarrow +\infty$; the integral of the remaining bit $\int_{2\Delta}^A d\epsilon (-2/\epsilon)\rho_{\infty}(\epsilon)$ is easy to calculate. In the integral on \mathbf{k} of the counter-term, still cut-off by $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$, we subtract from $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$ its equivalent $1/2E_{\mathbf{k}}$, which makes it possible to take the limit $A \rightarrow +\infty$; the integral of the remaining bit $\int d^3\mathbf{k} \Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})/2E_{\mathbf{k}}$ is easily calculated in the limit of large A since we can replace $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ with $2E_{\mathbf{k}}$.

16. We establish them by direct substitution in integral forms (8): taking into account (10) and $\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2$, the integrand is identically zero.

17. We limit ourselves for brevity to the case $\mu > 0$ and introduce the intermediates $\rho_{\pm}(\epsilon) = (\pi/2)(2m/\hbar^2)^{3/2}[\mu \pm (\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}/2]^{1/2}$, with $\rho_+(\epsilon)$ of support $[2\Delta, +\infty[$ and $\rho_-(\epsilon)$ of support $[2\Delta, 2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2}]$ (any function is by definition zero outside its support). Then $\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{0}) = [\rho_+(\epsilon) + \rho_-(\epsilon)](\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}/\epsilon$, $\rho_{++}(\epsilon, \mathbf{0}) = [\rho_+(\epsilon) + \rho_-(\epsilon)]\epsilon/(\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}$ and $\rho_{+-}(\epsilon, \mathbf{0}) = \rho_+(\epsilon) - \rho_-(\epsilon)$.

where $\epsilon_1(q)$ is simply the lower edge of the broken pair continuum [1, 29]; their expression appeared in [3]. Note that $\epsilon_3(q)$ merges with $\epsilon_1(q)$ at $q = 2k_0$, which is the upper edge of the considered q interval. Let us now introduce the wave number q_0 , function of the interaction strength and always located in the interval $[0, 2k_0]$:

$$\frac{1}{4}\check{q}_0^2 = 1 + \check{\Delta}^{2/3} \left[(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - 1 \right]^{1/3} - \check{\Delta}^{2/3} \left[(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} + 1 \right]^{1/3} \quad (57)$$

where we thought it best, for simplicity, to express q_0 in units of k_0 and the order parameter Δ (here width of the BCS gap) in units of μ . This rescaling, identified by a Czech accent, amounts to setting $\check{h} = 2m = k_0 = 1$ and can be applied to any wave number q and any energy ϵ , as follows:

$$\check{q} = \frac{q}{k_0} \text{ and } \check{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\mu} \text{ with } k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar \text{ here} \quad (58)$$

Then, for all $q \in]0, q_0[$, there is a midpoint of non-analyticity $\epsilon_2(q)$, therefore strictly between $\epsilon_1(q)$ and $\epsilon_3(q)$, given after rescaling by the largest real root of the polynomial of degree eight:

$$P_8(X) \equiv [X^2 - \check{q}^2(2 + \check{q})^2][X^2 - \check{q}^2(2 - \check{q})^2] - 4\check{\Delta}^2[X^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)] \{ [X^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)]^2 - 36\check{q}^4 X^2 \} - 432\check{\Delta}^4 \check{q}^4 X^2 \quad (59)$$

Expression (57) of \check{q}_0 and that (59) of the polynomial $P_8(X)$ will be justified in section 4.2.2. In $q = q_0$, this midpoint disappears by merging with $\epsilon_3(q)$. For $q \in]q_0, 2k_0[$, there remains only the two points (56), but we will however set $\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$ in the following for simplicity.¹⁸ This discussion of the points of non-analyticity is illustrated and summarized in figures 3a and 3b. We complete it with some analytical results. First, as seen in figure 3b, \check{q}_0 has the following limiting behaviors at weak coupling $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ and for a vanishing $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ chemical potential:

$$\check{q}_0 \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{=} 2 - 2^{1/3}\check{\Delta}^{2/3} + O(\check{\Delta}^{4/3}) \quad \text{and} \quad \check{q}_0 \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} + O(\check{\Delta}^{-2}) \quad (60)$$

and remains always greater than $2/\sqrt{3}$ therefore than 1. Then, as we see in figure 3a, $\epsilon_2(q)$ exhibits, as a function of q , an absolute maximum at $q = k_0$, around which we have the Taylor expansion:

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 1}{=} \check{\Delta} + (1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - \frac{(\check{q} - 1)^2}{(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - \check{\Delta}/2} + O(\check{q} - 1)^3 \quad (61)$$

In $q = 0$, $\epsilon_2(q)$ quadratically merges the point of non-analyticity $\epsilon_1(q)$, as already written by reference [3]:

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} 2\check{\Delta} + \check{q}^2/\check{\Delta} + O(\check{q}^4) \quad (62)$$

Finally, in the limits of large and of weak Δ/μ taken at fixed q/k_0 , one has simple expressions

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{q} < \check{q}_0(\infty) = 2/\sqrt{3}} = 2\check{\Delta} + \frac{\check{q}^2(2 - \check{q}^2)}{2\check{\Delta}} + O(1/\check{\Delta}^3) \quad \text{and} \quad \check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0^+}{\check{q} \text{ fixed } \in]0, 2[} = \check{q}(2 - \check{q}) + \check{\Delta}\check{q}^{1/2}(2 - \check{q})^{1/2} + \check{\Delta}^2 \frac{1 + \check{q}^2}{4\check{q}} + O(\check{\Delta}^3) \quad (63)$$

Let us specify the nature of the singularities of the spectral densities at energies ϵ_i . $\epsilon_2(q)$ and $\epsilon_3(q)$ are kinks for the three spectral densities ρ_{++} , ρ_{--} and ρ_{+-} . $\epsilon_1(q)$ is a point of discontinuity for ρ_{++} and a kink for ρ_{--} , see (74), but is nothing for the spectral density ρ_{+-} which remains zero at positive energies up to $\epsilon = \epsilon_2(q)$.

Let us end with the poorest cases: when $\mu > 0$ but $q > 2k_0$, or when $\mu < 0$ (the BCS dispersion relation $\epsilon_{\mathbf{k}}$ is then minimal at $k = 0$) but q arbitrary, there remains only one point of non-analyticity of the spectral densities on the real axis, namely $\epsilon = \epsilon_3(q)$ [3], which is none other than the lower edge of the broken pair continuum at wave number q [1, 29].¹⁹

18. The function « largest real root of $P_8(X)$ » naturally continues to exist for $q > q_0$; it tangentially meets the function $\epsilon_3(q)$ at $q = q_0$ (same first but not second derivative) and becomes smaller than $\epsilon_3(q)$ beyond this point. Note that $\epsilon_3(q)$ has an inflection point in $q = q_0$, $d^2\epsilon_3(q = q_0)/dq^2 = 0$, as predicted by the method of reference [3]: the first function $k \mapsto \epsilon_{k+q/2} + \epsilon_{kq/2}$ introduced in footnote 19 to come has a maximum at $k = 0$ for $q < q_0$ and a minimum for $q > q_0$.

19. These results are obtained with the method of reference [3], which connects the points of non-analyticity in energy of the spectral densities with the absolute or relative extrema of the functions $k \mapsto \max_u \epsilon_{\mathbf{k}+u\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-u\mathbf{q}/2} = \epsilon_{k+q/2} + \epsilon_{kq/2}$ and $k \mapsto \min_u \epsilon_{\mathbf{k}+u\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-u\mathbf{q}/2} = 2\epsilon_{(k^2+q^2/4)^{1/2}}$ where $u = \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{q}})$. In the two poor cases considered, these functions are strictly increasing over \mathbb{R}^+ because $-\mu + \hbar^2 q^2/8m > 0$.

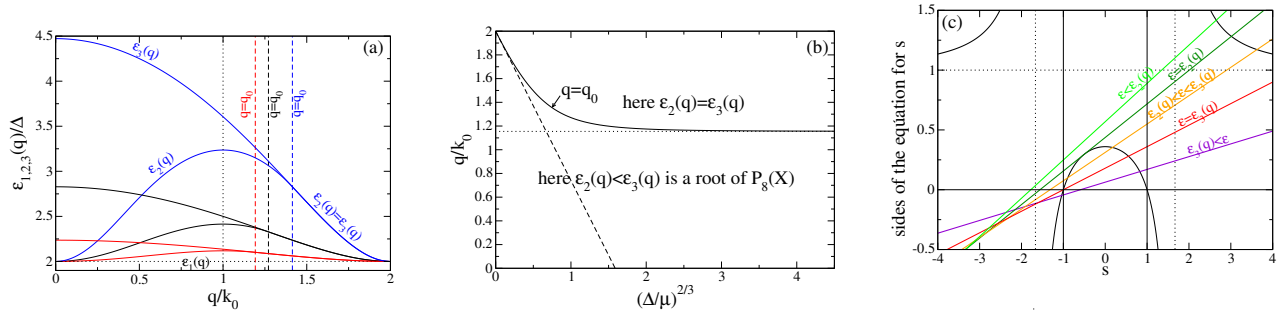


Figure 3: For a gas of fermions of zero-range interaction (case of cold atoms) and chemical potential $\mu > 0$, we show in (a) the energies $\epsilon_n(q)$, $n \in \{1, 2, 3\}$, points of non-analyticity in the spectral densities $\epsilon \mapsto \rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ on the real axis as functions of the wave number q in units of $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, for different values of the order parameter $\Delta/\mu = 1$ (black), $\Delta/\mu = 2$ (red), $\Delta/\mu = 1/2$ (blue). The horizontal black dotted line showing $\epsilon_1(q) = 2\Delta$ is common to the three coupling values since the energies are expressed in units of Δ . For a given value of Δ/μ , the lower solid line shows $\epsilon_2(q)$ and the upper solid line shows $\epsilon_3(q)$, the two curves joining at a certain critical wave number $q = q_0(\Delta)$ (vertical dashed line), given by (57), beyond which they coincide by convention ($\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$). The two energies $\epsilon_{1,2}(q)$ separate at $q = 0$ and the three energies $\epsilon_n(q)$ join at $q = 2k_0$, whatever Δ . Similarly, the curve $\epsilon_2(q)$ reaches its maximum invariably at $q = k_0$ (black vertical dotted line), to the left of $q = q_0$. We show in (b) the critical wave number q_0 as a function of Δ with a solid black line. This one therefore separates the band $\mathbb{R}^+ \times [0, 2k_0]$ in the plane (Δ, q) into a higher domain where $\epsilon_2(q) \equiv \epsilon_3(q)$ is given by equation (56), and a lower domain where $\epsilon_2(q)/\mu < \epsilon_3(q)/\mu$ is the largest real root of polynomial $P_8(X)$ of equation (59). At the border, $\epsilon_2(q)$ undergoes a second order transition (continuity of $\epsilon_2(q)$ and its first derivative but discontinuity of its second derivative $d^2\epsilon_2(q)/dq^2$, see footnote 18). Dotted and dashed lines: limiting behaviors (60) of q_0 . We carry out in (c) a graphic discussion of equation (71) on s by representing the right-hand side (solid black line, vertical and horizontal asymptotes in dotted lines) and the left-hand side (oblique straight lines in color) as functions of the unknown, for $q = 2k_0/3$, $\epsilon = 5\Delta/2$ and different values of Δ/μ [2/3 (light green), 0.7607084 (dark green), 9/10 (orange), 32/27 (red), 2 (purple), from top to bottom at $s = 0$]: in the interval $[-1, 1]$, delimited by thin continuous vertical lines, there is then successively 0 root (case $\epsilon < \epsilon_2(q)$), 1 double root (case $\epsilon = \epsilon_2(q) < \epsilon_3(q)$), 2 roots of absolute value < 1 (case $\epsilon_2(q) < \epsilon < \epsilon_3(q)$), 2 roots of which one is equal to -1 (case $\epsilon = \epsilon_3(q)$), and finally 1 root (case $\epsilon > \epsilon_3(q)$). In the spectral densities, it is necessary to integrate on $s \in [-1, 1]$ where the black curve is below the oblique line plotted at the considered energy (see discussion around (71)).

4.2.2. Expressions of spectral densities

In the continuous limit of the lattice model, the spectral densities (13) can be expressed analytically in terms of elliptical integrals. This computational breakthrough will greatly simplify the numerical and analytical studies that follow; in particular, it makes it possible to immediately carry out the analytic continuation of the spectral densities to complex energies z as required by the procedure (12), since the properties of elliptical integrals in the complex plane are known.²⁰ We give here the expressions of the spectral densities in the most interesting case $\mu > 0$ and $0 < q < 2k_0$, see table 2. To make the writing compact, we have rescaled the energy ϵ and the wave number q as in (58), the spectral densities as follows:

$$\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q}) = \frac{2mk_0}{\hbar^2} \check{\rho}_{ss'}(\check{\epsilon}, \check{q}) \quad (64)$$

then we have introduced for the energies $\epsilon \geq 2\Delta$ the hyperbolic changes of variable ($\Omega \geq 0$),

$$\text{ch } \Omega = \frac{\check{\epsilon}}{2\check{\Delta}}, \quad \text{sh } \Omega = \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}{2\check{\Delta}} \quad \text{and} \quad \text{th } \Omega = \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}{\check{\epsilon}} \quad (65)$$

²⁰. The elliptical integrals $E(\phi, k)$ and $F(\phi, k)$ have as functions of k^2 , in their principal value, the branch cut $k^2 \sin^2 \phi \in [1, +\infty]$, that of $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$.

and defined the following functions of an angle $\psi \in [0, \pi]$,

$$f_{--}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{sh}^2 \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = E(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) + \frac{\operatorname{sh}^2 \Omega \sin \psi \cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} - F(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) = \operatorname{ch} \Omega E(u, \operatorname{th} \Omega) - \frac{F(u, \operatorname{th} \Omega)}{\operatorname{ch} \Omega} \quad (66)$$

$$f_{++}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \operatorname{ch}^2 \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = E(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) + \frac{\operatorname{sh}^2 \Omega \sin \psi \cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} = \operatorname{ch} \Omega E(u, \operatorname{th} \Omega) \quad (67)$$

$$f_{+-}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \cos \alpha \operatorname{sh} \Omega \operatorname{ch} \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sh} \Omega \operatorname{ch} \Omega \sin \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} \quad (68)$$

where $E(\phi, k)$ and $F(\phi, k)$ are the elliptic integrals of second and first kind in the definition §8.111 of [20], we used §8.127 of [20] and we set

$$u = \operatorname{acos} \frac{\cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} \quad (69)$$

The calculations leading to these results are exposed in [Appendix A.2](#), but let's give the main lines here. In the integral form (13) of the spectral densities, written in spherical coordinates of axis \mathbf{q} , one carries out immediately the integration on the azimuthal angle thanks to the rotational invariance of axis \mathbf{q} then, with more effort, on the polar angle thanks to the Dirac distribution fixing the energy of the broken pair in the integrand. It remains to integrate on the wave number k . However, the polar angles where the argument of the Dirac distribution vanishes must take physical values, which imposes constraints on k . First, they must be real, which restricts k to a certain segment which is cleverly parametrized as follows:

$$\check{k}^2 + \frac{\check{q}^2}{4} - 1 \equiv \frac{1}{2} (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} s \quad \text{where } s \in [-1, 1] \quad (70)$$

The integral on k therefore boils down to an integral on s . Then they must be in the range $[0, \pi]$. To implement this constraint, we must solve the following third degree equation on s , which expresses the fact that the polar angles reach the edges 0 and π of the allowed interval:

$$\boxed{\frac{4\check{q}^2}{\check{\epsilon}^2} \left[\frac{1}{2} (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} s + 1 - \frac{\check{q}^2}{4} \right] = \frac{1 - s^2}{\frac{\check{\epsilon}^2}{\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2} - s^2}} \quad (71)$$

The polar angles are between 0 and π when the right-hand side of (71) is less than the left-hand side. The graphical discussion in figure 3c shows that, for q small enough, three cases arise: (i) at fairly low energy, equation (71) has no root in the interval $[-1, 1]$, and we can therefore integrate on s in all $[-1, 1]$; (ii) at intermediate energies, equation (71) has two roots s_1 and s_2 ($s_1 < s_2$) in $[-1, 1]$, and we must integrate on s in $[-1, s_1] \cup [s_2, 1]$; (iii) at fairly high energy, the root s_1 goes below -1 and equation (71) has s_2 as the only root in $[-1, 1]$, so that we must integrate on s in $[s_2, 1]$. These topology changes of the integration domain on s are at the origin of the points of non-analyticity of the spectral densities. The point $\epsilon = \epsilon_2(q)$ in section 4.2.1 corresponds to the transition between the cases (i) and (ii): $s_1 = s_2$ is double root and the discriminant of equation (71) vanishes, which leads to $P_8(\check{\epsilon}_2(q)) = 0$, where $P_8(X)$ is the polynomial (59).²¹ The point $\epsilon = \epsilon_3(q)$ in section 4.2.1 corresponds to the transition between cases (ii) and (iii): we then have $s_1 = -1$, as we can verify by direct substitution of s by -1 in (71). When q is too large, the scenario is

21. It remains to show that $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ is the largest real root of $P_8(X)$. To this end, let us work on the polynomial $P_4(X)$ of degree 4 with real coefficients such that $P_8(X) = P_4(X^2)$. In Lagrange's method, the roots of $P_4(X)$ are expressed as functions of those of the associated degree 3 polynomial $R(X)$ called resolvent cubic. We have the following result: if $R(X)$ (with real coefficients) has only one real root, this one is positive and $P_4(X)$ has two real roots x_1 and x_2 and two complex conjugate roots z_0 and z_0^* . Now, $R(X)$ actually has only one real root since its Cardan discriminant $\delta = (512^2/27)\check{\Delta}^4(1 + \check{\Delta}^2)\check{q}^{12}[27\check{\Delta}^4 + 72\check{\Delta}^2\check{q}^4 + 16\check{q}^6(4 - \check{q}^2)]^3$ is > 0 for $0 < \check{q} < 2$. To show that x_1 and x_2 are of the same sign, we use the Viète relation $x_1 x_2 |z_0|^2 = P_4(0) = \check{q}^6(4 - \check{q}^2)^3[4\check{\Delta}^2 + \check{q}^2(4 - \check{q}^2)] > 0$. Finally, the roots x_1 and x_2 are > 0 since one of them is none other than $\check{\epsilon}_2^2(q)$; to show that this is the larger of the two, we verify that this is true for $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$ ($\check{\epsilon}_2^2(q)$ is the only one root of $P_4(X)$ which diverges) then we use a continuity argument up to $\check{\Delta} = 0^+$ (the resultant of $P_4(X)$ and of its derivative $P_4'(X)$, proportional to δ , never vanishes so $P_4(X)$ has no double root, and x_1 and x_2 cannot cross). This demonstration does not apply for $\check{\Delta} = 0$, where z_0 has a real limit, x_1 and x_2 merge and $\check{\epsilon}_2^2(q)$ is this time the smallest root of $P_4(X)$.

simplified: when we increase the energy starting from the case (i), a double root $s_1 = s_2$ certainly appears in (71), but this root is < -1 , it is *not* in the interval $[-1, 1]$ and we can continue to integrate on $s \in [-1, 1]$; the energy continuing to increase, s_2 reaches -1 then exceeds it while s_1 remains < -1 : we jumped directly from the case (i) to the case (iii). The value q_0 of q separating the two scenarios (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) and (i) \rightarrow (iii) is therefore such that the double root $s_1 = s_2$ of (71) appears exactly in -1 ; by writing that $s = -1$ is the root of (71) and its derivative with respect to s , we come across a cubic equation on q^2 , equivalent to the condition $d^2\epsilon_3(q)/dq^2 = 0$ of footnote 18, and of which (57) is actually the real solution.

To be complete, we give, when $\epsilon > \epsilon_2(q)$, the expression of the two smallest real roots s_1 and s_2 of equation (71) in terms of the Cardan angle γ spanning $[0, \pi]$:

$$s_{1,2} = \frac{Y_q}{6\check{q}^2(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} - \frac{(Y_q^2 + 12\check{q}^4\check{\epsilon}^2)^{1/2}}{3\check{q}^2(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} \cos \frac{\pi \mp \gamma}{3} \quad \text{where } Y_q = \check{\epsilon}^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)$$

$$\text{and } \gamma = \text{acos} \frac{Y_q(Y_q^2 - 36\check{\epsilon}^2\check{q}^4) + 216\check{\epsilon}^2\check{q}^4\check{\Delta}^2}{(Y_q^2 + 12\check{q}^4\check{\epsilon}^2)^{3/2}} \quad (72)$$

Note also that the change of variable $s = \cos \alpha$, where $\alpha \in [0, \pi]$, was carried out, as we see on the integration variable in the definition of the functions $f_{ss'}(\psi)$ and on the value of their argument in table 2. Finally, we can verify that, in the weak coupling limit $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ at $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ and $\bar{\epsilon} = \check{\epsilon}/\check{\Delta}$ fixed as prescribed by (14), tables 1 and 2 agree; funny remark, there is in fact a perfect agreement on the spectral densities ρ_{ss}^{III} even *before* taking the limit (only the upper bound of the interval II is different for finite Δ/μ). The calculations leading to table 2 easily extend to any q and to any sign of μ ; thus, for $\mu > 0$ but $q > 2k_0$, the spectral densities are identically zero for $\epsilon < \epsilon_3(q)$ and of the form III otherwise, as it appears from the end of section 4.2.1.

4.2.3. Behavior of spectral densities at high energy and at the edge of the continuum

Let us give two very simple applications of the expressions of spectral densities from table 2. The first is a high energy asymptotic expansion,

$$\left(\begin{array}{l} \check{\rho}_{++}(\check{\epsilon}, \check{q}) \\ \check{\rho}_{--}(\check{\epsilon}, \check{q}) \\ \check{\rho}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q}) \end{array} \right)_{\check{\epsilon} \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{8^{1/2}} \left[(\check{\epsilon}^2 + 4\check{\Delta}^2)^{1/2} + 2 - \frac{\check{q}^2}{2} \right]^{1/2} \left(\begin{array}{l} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 5\check{q}^2/12) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \\ (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)\check{\epsilon}^{-2} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 13\check{q}^2/12) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \\ (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}\check{\epsilon}^{-1} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 3\check{q}^2/4) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \end{array} \right) \quad (73)$$

useful above all for controlling and reducing energy truncation errors in the numerical calculations of section 4.4. At the order of this expansion, however quite high, we have the impression that ρ_{+-} is the geometric mean of ρ_{++} and ρ_{--} , which is not true on any neighborhood of infinity [see the integrals in (66), (67) and (68)] unless $q = 0$ (see footnote 17). The second application is a Taylor expansion at the lower edge 2Δ of the broken pair continuum (here $0 < \check{q} < 2$):

$$\check{\rho}_{++}(\check{\epsilon}, \check{q}) \Big|_{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}^+} = \frac{\pi^2}{2\check{q}} \left[\check{\Delta} + \frac{1}{4}(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}) + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^2 \right] \quad \text{and} \quad \check{\rho}_{--}(\check{\epsilon}, \check{q}) \Big|_{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}^+} = \frac{\pi^2}{4\check{q}} \left[(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}) - \frac{1}{8\check{\Delta}}(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^2 + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^3 \right] \quad (74)$$

We then see, by means of (51), that $\check{M}_{++}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q})$ exhibits on the real axis at $\check{\epsilon} = 2\check{\Delta}$ a logarithmic singularity in its real part and a discontinuity in its imaginary part:

$$\check{M}_{++}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q}) \Big|_{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}} = (2\pi)^{-3} \frac{\pi^2 \check{\Delta}}{2\check{q}} [\ln |\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}| - i\pi \Theta(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})][1 + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})] + \text{smooth function of } \check{\epsilon} \quad (75)$$

which explains the sharp peak (with vertical tangent) in the intensity of the modulus-modulus response function at the angular frequency $2\Delta/\hbar$, observed but not interpreted in reference [3], and which has nothing to do with the Lorentzian peak of the continuum mode (see section 4.3). In $\check{M}_{--}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q})$, this edge singularity is reduced by a factor $\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}$. As for $\check{M}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q})$, it is of course a smooth function of $\check{\epsilon}$ around the edge since the spectral density ρ_{+-} is identically zero on a neighborhood of the edge. The matrix elements are here rescaled as in (84).

$\check{\epsilon} < 2\check{\Delta}$	$\check{\rho}_{--}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$ $\check{\rho}_{++}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$ $\check{\rho}_{+-}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$
$2\check{\Delta} < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q})$	$\check{\rho}_{--}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \pi \left[\frac{\check{\epsilon}}{2\check{q}} E(\text{th } \Omega) - \frac{2\check{\Delta}^2}{\check{q}\check{\epsilon}} K(\text{th } \Omega) \right] = \frac{\pi\check{\Delta}}{\check{q}} [E(\text{i sh } \Omega) - K(\text{i sh } \Omega)]$ $\check{\rho}_{++}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \pi \left[\frac{\check{\epsilon}}{2\check{q}} E(\text{th } \Omega) \right] = \frac{\pi\check{\Delta}}{\check{q}} E(\text{i sh } \Omega)$ $\check{\rho}_{+-}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv 0$
$\check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q})$	$\check{\rho}_{--}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{--} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) + f_{--} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$ $\check{\rho}_{++}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{++} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) + f_{++} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$ $\check{\rho}_{+-}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) - f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$
$\check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon}$	$\check{\rho}_{--}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{--} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$ $\check{\rho}_{++}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{++} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$ $\check{\rho}_{+-}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$

Table 2: Spectral densities $--$, $++$ and $+-$ of (13) in the continuous limit $b \rightarrow 0$ of our lattice model, as functions of energy $\epsilon > 0$. The interaction strength is arbitrary but we have limited ourselves to the richest case $\mu > 0$ and $0 < q < 2k_0$, where $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ is the wave number minimizing the BCS dispersion relation $\epsilon_{\mathbf{k}}$. On each interval between the zero energy, the non-analyticity points ϵ_i given in section 4.2.1 and the infinite energy, these are smooth functions of ϵ with different analytic continuations to complex energies, hence their numbering in Roman numerals. $E(k)$ and $K(k)$ are the complete elliptic integrals of second and first kind (see §8.112 of [20]); $\Omega \in]0, +\infty[$ is a convenient hyperbolic parametrization (65) of the energy when it is greater than 2Δ ; in the fourth and fifth row of the table, the two forms given are equivalent since $E(\text{th } \Omega) = E(\text{i sh } \Omega)/\text{ch } \Omega$ and $K(\text{th } \Omega) = \text{ch } \Omega K(\text{i sh } \Omega)$, including for complex Ω as long as $\text{Re ch } \Omega > 0$; the functions f_{--} , f_{++} and f_{+-} are those of equations (66), (67) and (68); s_1 and s_2 are the real roots of (71) less than 1 sorted in ascending order, when they exist, and are given by (72). When $q > q_0$, where q_0 is given by (57), we actually have $\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$ (see section 4.2.1). The energies and wave numbers are rescaled as in (58) and the spectral densities as in (64).

4.3. Characterizing the continuum collective branch: dispersion relation, spectral weights, optimal excitation and observation channels

From an experimental point of view, the presence of a complex energy $z_{\mathbf{q}}$ in the broken pair continuum results in a visible Lorentzian peak in the intensity of the gas frequency response function introduced in [3], or if one prefers in the modulus squared of the Fourier transform of the time response (6), of the form $\omega \mapsto |Z/(\hbar\omega - z_{\mathbf{q}})|^2$ where ω is the angular frequency, at least if (i) the central energy $\text{Re } z_{\mathbf{q}}$ of the Lorentzian is in the interval $[\epsilon_a, \epsilon_b]$ between the points of non-analyticity through which the analytic continuation is carried out (ϵ_a/\hbar and ϵ_b/\hbar thus delimit an interval of observability in angular frequency) and (ii) half-energy-width $|\text{Im } z_{\mathbf{q}}|$ of the Lorentzian is sufficiently weak that one can easily separate it from the broad contribution of the continuum [3]. We thus see that the mode is characterized by three real quantities, its angular frequency $\text{Re } z_{\mathbf{q}}/\hbar$, its damping rate $|\text{Im } z_{\mathbf{q}}|/\hbar$ and its spectral weight, proportional to $|Z|^2$, where Z is the residue of the pole $z_{\mathbf{q}}$ in the analytic continuation of the experimental response function.

To characterize the continuum mode, we must first calculate its complex energy $z_{\mathbf{q}}$, by solving equation (48) after analytic continuation as follows:

$$0 = \det M_{\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \equiv M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - [M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})]^2 \text{ with } M_{ss'\downarrow}(z, \mathbf{q}) = M_{ss'}(z, \mathbf{q}) - (2\pi)^{-3} 2i\pi\rho_{ss'}^{[III]}(z, \mathbf{q}) \quad (76)$$

We indeed perform especially the study for $\mu > 0$ and $0 < q < 2k_0$, and for an analytic continuation through the type II interval, that is $2\Delta < \epsilon < \epsilon_2(q)$, see table 2; the other cases are treated in section 4.8. Then we calculate the residue Z . For this, we start from the temporal expression (49) of small deviations of the order parameter and, in the integrand, we expand in the vicinity of $z = z_{\mathbf{q}}$ the inverse of matrix M analytically continued and here restricted to its upper left

2×2 block, which brings up a matrix residue \mathcal{M} :

$$M_{\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})^{-1} \underset{z \rightarrow z_{\mathbf{q}}}{=} \frac{\mathcal{M}}{z - z_{\mathbf{q}}} + O(1) \quad \text{with} \quad \mathcal{M} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) & -M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \\ -M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) & M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (77)$$

If the excitation only perturbs the phase of the order parameter (+ channel, first coordinate) and we measure the response on the phase of the order parameter, the relevant residue is $Z_+ = \langle +|\mathcal{M}|+ \rangle = M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / \left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. Conversely, if we initially excite and finally measure only the modulus of the order parameter (- channel, second coordinate), the relevant residue is $Z_- = \langle -|\mathcal{M}| - \rangle = M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / \left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. In the general case, the residue Z in the gas response is a linear combination of the matrix elements of \mathcal{M} , with coefficients depending on the excitation applied to the gas and the measured observable. By applying the residue theorem to (49) as in figure 1, we find the contribution of the continuum mode to the time signal:

$$\text{signal}(t)|_{\text{pole } z_{\mathbf{q}}} = Z e^{-iz_{\mathbf{q}}t/\hbar} \quad \text{with} \quad Z = \langle \chi_{\text{obs}} | \mathcal{M} | \chi_{\text{exc}} \rangle \quad (78)$$

where the amplitudes $\langle \chi_{\text{obs}} | + \rangle$ and $\langle \chi_{\text{obs}} | - \rangle$ are those of the observable measured in the phase and modulus channels, and the amplitudes $\langle + | \chi_{\text{exc}} \rangle$ and $\langle - | \chi_{\text{exc}} \rangle$ are those of the excitation applied in these channels. Note that $|\chi_{\text{exc}} \rangle$ has no simple expression, but involves the source vector in (49) analytically continued to $z = z_{\mathbf{q}}$, itself a function of the applied excitation through $y_{\mathbf{kq}}^{\pm}$ therefore of the initial perturbation of the BCS state vector (1). However, since matrix \mathcal{M} is by construction of zero determinant, it is generally of rank one; after some thought, we manage to put it in a particularly simple dyadic form, in terms of vectors $\hat{\chi}$ normalized to unity, after having factored out a reduced real global residue Z_{opt} :

$$\mathcal{M} = Z_{\text{opt}} |\hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}} \rangle \langle \hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}}| \quad \text{with} \quad \begin{cases} |\hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}} \rangle \equiv Z_{\text{opt}}^{-1/2} \begin{pmatrix} (Z_+^{1/2})^* \\ -\varepsilon (Z_-^{1/2})^* \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |Z_+|^{1/2} \\ e^{-i\theta} |Z_-|^{1/2} \end{pmatrix} \\ |\hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}} \rangle \equiv Z_{\text{opt}}^{-1/2} \begin{pmatrix} Z_+^{1/2} \\ -\varepsilon Z_-^{1/2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |Z_+|^{1/2} \\ e^{i\theta} |Z_-|^{1/2} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{and} \quad \varepsilon \in \{+, -\} \quad (79)$$

The reduced global residue is simply the sum of the moduli of the particular residues Z_+ and Z_- . As we can see, the vectors of the dyad are expressed in terms of these moduli and of an angle θ , relative phase of the modulus-phase coupling amplitude and of a diagonal coupling amplitude in matrix M analytically continued in $z_{\mathbf{q}}$:

$$Z_{\text{opt}} = |Z_+| + |Z_-| \quad \text{and} \quad \theta = \arg[-M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})] \quad (80)$$

We understand that $\arg(Z_- / Z_+) = 2\theta$ since $Z_+ / Z_- = M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. By comparing (79) and (78), we see that $\langle \hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}} |$ gives the optimal observable, that is to say the relative linear combination of the phase and modulus channels to be observed to maximize the residue $|Z|$ therefore the weight of the continuum mode in the experimental signal; similarly, $|\hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}} \rangle$ gives the relative amplitudes of the excitation which must be produced on the phase and the modulus of the order parameter to maximize the weight of the continuum mode in the signal, for a fixed observable. If these optimizations are made jointly on the excitation and the observation, one achieves the maximum modal weight accessible for fixed norms of $\langle \chi_{\text{obs}} |$ and $|\chi_{\text{exc}} \rangle$, of residue $Z_{\text{opt}} \| |\chi_{\text{obs}} \rangle \| \| |\chi_{\text{exc}} \rangle \|$. To compute the denominator of \mathcal{M} in (77), we need the spectral density derivatives with respect to z , which can be written simply (see §8.123 of [20]):

$$\frac{d}{dz} \rho_{++}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{\check{z}}{\check{z}^2 - 4\check{\Delta}^2} \check{\rho}_{--}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) \quad \text{and} \quad \frac{d}{dz} \rho_{--}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{1}{\check{z}} \check{\rho}_{++}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) \quad (81)$$

where $\check{z} = z/\mu$ as in (58). The derivative of the matrix elements of M is obtained by differentiation of the forms (50, 51) under the integral sign.

4.4. Numerical results on the continuum collective branch

We solve numerically the eigenenergy equation (76) on the continuum mode, by evaluating the integral forms (50, 51) and the elliptic functions in the spectral densities of table 2 as in section 3.4.1. Here, $\mu > 0$ and the analytic continuation is done through the interval II, $2\Delta < \varepsilon < \varepsilon_2(q)$, so that the wave number q varies between opening

point $q = 0$ and closing point $q = 2k_0$ of the interval. The dispersion relation, the residues in the phase and modulus channels, the optimal reduced residue Z_{opt} and the angle θ defining the optimal observation channel thus obtained (see section 4.3) are shown in figure 4, for a weak coupling $\Delta/\mu = 1/5$, a strong coupling $\Delta/\mu = 1$ and a coupling $\Delta/\mu = 10$ close to a zero chemical potential.

In all cases, the imaginary part of z_q is a decreasing negative function of the wave number q . The real part has a richer behavior in weak coupling: it passes by a relative maximum $> 2\Delta$ then by an absolute minimum $< 2\Delta$ at weak q , before starting to grow approximately linearly at large q . In strong coupling, the rich structure is maintained but is stretched in wave number (the absolute minimum is located at $q \approx k_0$) and the relative maximum is hardly noticeable. Near the zero of μ , the real part in turn becomes a decreasing function of q , and is everywhere less than 2Δ , which does not really bring the mode into the gap $[0, 2\Delta]$ since its complex energy z_q remains separated by the part of the branch cut folded over $] -\infty, 2\Delta]$ in the prescription (12); in particular, we do not expect a Lorentzian peak in the response functions of the system at the angular frequency $\omega = \text{Re } z_q / \hbar$ because it is outside the observability window (see section 4.3 and reference [3]). The situation is the same for the part of the branch with $\text{Re } z_q > \varepsilon_2(q)$, which is separated from the real physical axis by two superimposed branch cuts, the one existing and the one coming from the folding back on $[\varepsilon_2(q), +\infty[$ of part of the branch cut $[2\Delta, \varepsilon_2(q)]$. Paradoxically, we notice that the largest real and imaginary parts of $\check{z}_q - 2\check{\Delta}$ in absolute value over $]0, 2k_0[$ are reached in the weak coupling regime rather than in the $\Delta/\mu \geq 1$ regime.

The residue Z_- in the $-$ channel of the modulus deviations of the order parameter strongly dominates that Z_+ of the phase deviations, as we see in the second column of figure 4, except in weak coupling for $q \approx k_0$ where $|Z_+| \approx |Z_-|$; the dominance of $|Z_-|$ is particularly clear at low q , where $|Z_+|$ tends to zero much faster than the linear law followed by $|Z_-|$. From the point of view of its spectral weight, the continuum mode therefore remains here essentially a modulus mode, as it was in the weak coupling limit at $q/k_0 = O(\Delta/\mu)$, even if the phase-modulus coupling M_{+-} in matrix M cannot absolutely be neglected in the calculation of its eigenenergy z_q , on the contrary of equation (34). As for the relative phase θ between the two channels maximizing the spectral weight, in the third column of figure 4, it grows vaguely linearly in q over the entire interval $]0, 2k_0[$, except in weak coupling where it reaches a plateau close to zero.

The analytical studies of sections 4.5, 4.6 and 4.7 provide a physical and quantitative explanation of these observations.

4.5. The continuum collective branch at low q

As in the pioneer reference [2], first of all it is necessary to study analytically the continuum mode at low wave number. Here we largely resume the results of [3] at infinitesimal q (section 4.5.1) by refining them (section 4.5.2 specifies the domain of applicability in wave number) and extending them to other quantities than z_q and Z_- (section 4.5.3).

4.5.1. The quadratic start and its coefficient

As shown by reference [2] in the weak coupling limit $\Delta/\mu \rightarrow 0$ and reference [3] for any coupling $\Delta/\mu > 0$, the continuum collective branch (for an analytic continuation of type II) has a quadratic start at low wave number q :

$$\check{z}_q \underset{q \rightarrow 0}{=} 2\check{\Delta} + \zeta \frac{q^2}{\Delta} + O(q^3) \quad (82)$$

with a complexe coefficient ζ solution in the lower complex half-plane of the transcendental equation²²

$$\left[\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right] \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right] + 128\pi^2 [\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 = 0 \quad (83)$$

The non-diagonal element of M , that is to say the phase-modulus coupling, is written here at zero order in q therefore at energy 2Δ and at zero wave number, in a dimensionless form which we will apply in the following to all the matrix

22. By setting $S = 2(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})$, we also have $\zeta = 2/(1 - \cos S)$ with S solution of $S(S + \sin S) + 256\pi^2 [\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 (1 - \cos S) = 0$ (knowing that $[(1 + \cos S)/(1 - \cos S)]^{1/2} = -\sin S/(1 - \cos S)$), which in the weak coupling limit looks like equation (2.16) of [2].

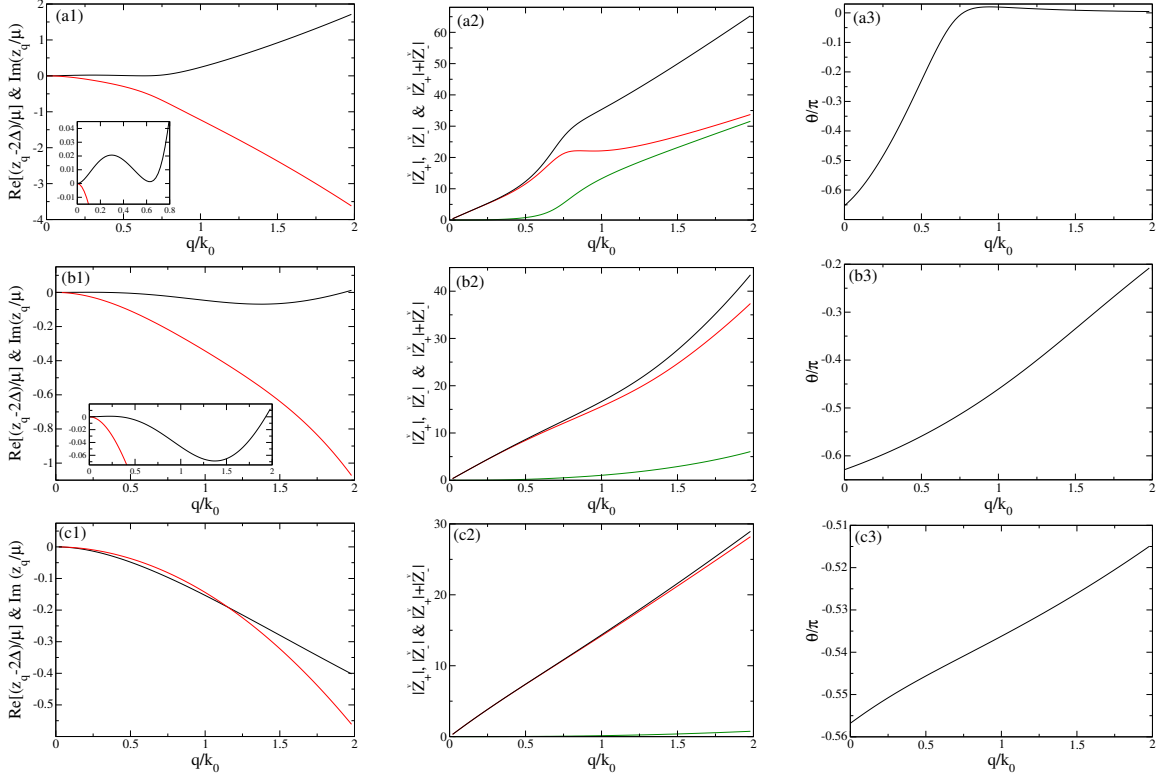


Figure 4: In a gas of fermions with zero range interactions (case of cold atoms) and chemical potential $\mu > 0$, in column 1: complex dispersion relation $q \mapsto z_q$ of the continuum mode, obtained by numerical solution of equation (76); the analytic continuation is of type II, therefore q spans $]0, 2k_0[$ where $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. Solid black line: real part shifted from its limit 2Δ at the origin; solid red line: imaginary part. The order parameter is equal to on row (a) $\Delta/\mu = 1/5$, on row (b) $\Delta/\mu = 1$ and on row (c) $\Delta/\mu = 10$. In column 2: residues $|Z_+|$ (green) and $|Z_-|$ (red) of the mode in the phase (index +) and modulus (index -) channels of deviations of the order parameter from equilibrium, and accessible reduced maximum residue $|Z_+| + |Z_-|$ (black), as functions of the wave number q in units of k_0 , after rescaling as in equation (84). In column 3: angle θ appearing in the optimal excitation and observation channels (79) allowing to reach the reduced maximum residue $|Z_+| + |Z_-|$. The insets in (a1) and (b1) are enlargements.

elements and by ricochet to the residues:

$$M_{ss'}(z, \mathbf{q}) = \frac{2mk_0}{\hbar^2} \check{M}_{ss'}(\check{z}, \check{q}) \quad \text{and} \quad Z_{\pm} = \frac{\hbar^4 k_0}{4m^2} \check{Z}_{\pm} \quad (84)$$

By setting $1/\check{\Delta} = \text{sh } \tau$, we take from [3] the explicit form

$$\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0) = -\frac{(e^{2\tau} - 1)^{1/2}}{(2\pi)^2} \left[\text{Re } \Pi(e^{\tau}, ie^{\tau}) - \Pi(-e^{\tau}, ie^{\tau}) + \frac{K(ie^{\tau})}{\text{sh } \tau} \right] < 0 \quad \forall \Delta/\mu > 0 \quad (85)$$

We also reproduce the low and large Δ/μ expansions of [3], by pushing the calculation one order further at large Δ/μ .²³

$$\zeta_{\check{\Delta} \rightarrow 0^+} = \zeta_0 - \frac{2\zeta_0^2}{\zeta_0 - 1} \left(\frac{\check{\Delta}}{\pi} \right)^2 \ln^2 \frac{\check{\Delta}}{8e} + O(\check{\Delta}^3 \ln^{\alpha} \check{\Delta}) \quad \text{and} \quad \zeta_{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} = -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{\Delta} - \frac{24i\sqrt{2}}{\pi^{7/2}} [\Gamma(5/4)]^2 \check{\Delta}^{1/2} + \frac{5}{2\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad (86)$$

23. In (86), we used, among other things, the non-trivial fact that $\text{Re } \Pi(e^{\tau}, ie^{\tau}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} K(i) - E(i)/2$; compared to [3], we preferred to show a Γ function rather than elliptical integrals, using identities $K(i) = (8/\pi)^{1/2} [\Gamma(5/4)]^2$ and $E(i) - K(i) = [\Gamma(3/4)]^2 / (2\pi)^{1/2}$.

The value ζ_0 is that (38) of the weak coupling limit, and it should be noted at large Δ/μ that ζ is real at the dominant order. Reference [3] also gives an equivalent of Z_- , see our equation (92). It is not useful here to specify the value of the exponent $\alpha > 0$ in (86).

4.5.2. Validity regime of the quadratic approximation

Reference [3] does not specify up to what value of q we can be satisfied with the quadratic approximation (82) on $z_{\mathbf{q}}$. Let us therefore make a critical review of the various approximations leading to it. Essentially, [3] sets $\check{k} = 1 + \check{q}K$ in the integral definition (8) of the matrix elements of M and, in spherical coordinates of axis \mathbf{q} , made \check{q} tend to zero under the integral sign at fixed K . In the denominator of the integrand, this supposes a quadratization of the BCS dispersion relation $\epsilon_{\mathbf{k}}$ around its minimum (reached in $\check{k} = 1$), which actually concatenates the two following quadratic approximations,

$$\check{\epsilon}_k = [(\check{k}^2 - 1)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \simeq [4(\check{k} - 1)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \simeq \check{\Delta} + \frac{2(\check{k} - 1)^2}{\check{\Delta}} \quad (87)$$

whose global validity condition is

$$|\check{k} - 1| \ll \min(1, \check{\Delta}) \quad (88)$$

We end up *in fine* with equivalents (u is the cosine of the polar angle):²⁴

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi \check{\Delta}}{4\check{q}(2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{K^2 + (u^2 - \zeta)/4} \quad \text{and} \quad \check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi \check{q}}{4\check{\Delta}(2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dK (\zeta - u^2)}{K^2 + (u^2 - \zeta)/4} \quad (89)$$

whose explicit integration and analytic continuation from $\text{Im} \zeta > 0$ to $\text{Im} \zeta < 0$ through $[0, 1]$ (this is the interval to choose given the behavior of $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ at low \check{q} in section 4.2.1) gives [3]

$$\check{M}_{++\downarrow}(\check{z}_q, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i\pi^2 \check{\Delta}}{(2\pi)^3 \check{q}} \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \quad \text{and} \quad \check{M}_{--\downarrow}(\check{z}_q, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i\pi^2 \check{q}}{(2\pi)^3 2\check{\Delta}} \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right] \quad (90)$$

and reproduces (83). In reality, integrating with respect to K over all \mathbb{R} only makes sense if the integrals converge within the validity domain of the quadratic approximation (87), so if $\check{k} - 1 = \check{q}K$ satisfies the condition (88). Since the width in K space in (89) is of the order of $|\zeta|^{1/2}$ if $1 \lesssim |\zeta|$ and of the order of unity otherwise, we end up with the constraint

$$\check{q} \ll \frac{\min(1, \check{\Delta})}{(1 + |\zeta|)^{1/2}} \approx \begin{cases} \check{\Delta} & \text{if } \check{\Delta} \rightarrow 0 \\ \check{\Delta}^{-1/2} & \text{if } \check{\Delta} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (91)$$

In the weak coupling limit, it reproduces the expected inequality $\check{q} \ll \check{\Delta}$ [2] i.e. $q\xi \ll 1$ where ξ is the size of a bound pair. In the vicinity of the chemical potential zero, it shows the unexpected wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$, of which we do not have any physical interpretation but which will emerge in section 4.7.

4.5.3. Other observables at low q

From equivalents (90) on the analytically continued matrix elements of M , we get the equivalents of the residues in the phase channel $+$ and the modulus channel $-$, and of the relative phase between the two channels maximizing the global residue:

$$\check{Z}_- \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{2i\check{q}}{\pi^2} \frac{(2\pi)^3 (\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})}{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})^2 + \frac{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})\zeta - \sqrt{\zeta - 1}}{2\zeta \sqrt{\zeta - 1}}} \quad \text{and} \quad \check{Z}_+ \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{i\check{q}^3}{\pi^2 \check{\Delta}^2} \frac{(2\pi)^3 \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right]}{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})^2 + \frac{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})\zeta - \sqrt{\zeta - 1}}{2\zeta \sqrt{\zeta - 1}}} \quad (92)$$

$$\theta \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \arg \left[(-i) \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \right] \quad (93)$$

It was enough for that to return to the definitions of these quantities in section 4.3 and take the derivative of (90) with respect to ζ . The equivalent of Z_- was already in [3]. That of Z_+ , which vanishes cubically rather than linearly, explains the overwhelming domination of the $-$ channel at low q in the second column of Figure 4. Finally, relation (93) gives the starting point of the curves in the third column of figure 4.

24. The second integral of (89) appears in equation (2.13) of reference [2] up to the trivial change of variable $K = K'/2$.

4.6. The continuum collective branch for $\Delta/\mu \ll 1$

In the weak coupling limit, we study the continuum collective branch (by type II analytic continuation) at wave number scales $q/k_0 \approx \Delta/\mu$ (section 4.6.1), $q \approx k_0$ (section 4.6.2) and $q/k_0 \approx (\Delta/\mu)^{2/3}$ (section 4.6.3). The first scale is natural, it corresponds to $1/\xi$ where ξ is the size of a $\uparrow\downarrow$ bound pair; the spectral study having already been made in section 3, we will content ourselves with adding some results on the residues and on the angle θ of section 4.3. The second scale was ignored in section 3 but it remains natural: it corresponds to the width $2k_0$ of the existence interval of the branch in q space. The third scale results from an in-depth study: it is the missing link making it possible to connect the large wave number limit of the first scale and the low wave number limit of the second; it also contains the minimum of the real part of the dispersion relation.

4.6.1. At the wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}$

As in section 3.2.1, we make Δ/μ tend to zero at fixed $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$, after rescaling of energies by Δ , $\bar{z} = z/\Delta$. At zero order in Δ/μ , we find the same limiting dispersion relation $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$, solution of (34) and the study of which has already been done in section 3.4. However, let us give some additional results. Numerically, we show in figure 5 the real part of the dispersion relation, with the rescaling \bar{q} and \bar{z} of the variables, for weak and decreasing values of Δ/μ , in order to illustrate the convergence towards the limiting law and to reveal the presence for increasing \bar{q} of a decreasing minimum, totally absent from this limiting law and whose elucidation is postponed to section 4.6.3. Analytically, we complete section 3.4 by giving an equivalent of the residue of the continuum mode, within the meaning of section 4.3, in the modulus channel:

$$\check{Z}_- \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\overset{\bar{q} \text{ fixed}}{\sim}} \check{\Delta} \bar{Z}_-^{(0)} \quad \text{with} \quad \bar{Z}_-^{(0)} \equiv \frac{1}{\frac{d}{d\bar{z}} \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})} \quad (94)$$

From sections 3.4.2 and 3.4.3, we derive its behavior at low reduced wave number

$$\bar{Z}_-^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} (2\pi)^2 \left[Z_1 \bar{q} + Z_2 \bar{q}^2 + Z_3 \bar{q}^3 + O(\bar{q}^4) \right] \quad \text{with} \quad \begin{cases} Z_1 = 2i\zeta_0/(\pi\sqrt{\zeta_0-1}) & \approx -0.125\,634 + 0.235\,132\,i \\ Z_2 = 2\zeta_0^2(3\zeta_0-5)/[3\pi^2(\zeta_0-1)^2] & \approx 0.043\,448 + 0.046\,167\,i \\ Z_3 = \frac{-2i\zeta_0^2}{\pi^3\sqrt{\zeta_0-1}} \left[1 + \frac{3\pi^2}{32} + \frac{8/9}{(\zeta_0-1)^3} \right] & \approx 0.008\,812 - 0.017\,157\,i \end{cases} \quad (95)$$

and at large reduced wave number (it is not useful to specify the value of the exponent α):

$$\text{Im} \bar{Z}_-^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{(2\pi)^2 \bar{q}}{\pi/2 + \text{atan} Y_0} + O(\ln^\alpha \bar{q}/\bar{q}) \quad \text{and} \quad \text{Re} \bar{Z}_-^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{(2\pi^2)^2 [\pi/2 + \text{atan} Y_0 + Y_0/(1+Y_0^2)]}{\bar{q} Y_0^2 (\pi/2 + \text{atan} Y_0)^3} + o(1/\bar{q}) \quad (96)$$

where the real number Y_0 is the solution of (44). Finally, we give to leading order the residue in the phase channel and the relative phase θ between the two channels maximizing the total residue:

$$\check{Z}_+^{(3)} = \check{\Delta} \bar{Z}_-^{(0)} \left[\frac{\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})}{\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})} \right]^2 \quad \text{and} \quad \theta^{(0)} = \arg \left[-\frac{\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})}{\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})} \right] \quad (97)$$

The expressions of the matrix elements are given at zero order in Δ/μ by (31, 33) (before analytic continuation and without rescaling (84)), and to order one for the phase-modulus coupling by equation (109) to come. We thus see that the residue in the phase channel is, relative to the modulus channel, reduced by a factor $\check{\Delta}^2 \ll 1$. Figure 7 shows all of these quantities for a fixed, very small value of Δ/μ .

4.6.2. At the wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

Whether we are in weak coupling or not, most of the continuum collective branch (for an analytic continuation of type II) lives with a wave number q of order k_0 . We therefore study it here by moving to the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed $\check{q} \in]0, 2[$; given the numerical results of figure 4, we expect a reduced eigenenergy \check{z}_q of order 0 in $\check{\Delta}$. Starting from section 4.2.1, we note in this limit that $\check{q}_0 \rightarrow 2 > \check{q}$, so that the spectral densities include *a priori* three distinct points of non-analyticity on the positive real semi-axis, whose expressions are very simple at zero order in $\check{\Delta}$:

$$\check{\epsilon}_1(\check{q}) \rightarrow 0, \quad \check{\epsilon}_2(\check{q}) \rightarrow \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) = \check{q}(2 - \check{q}) \quad \text{and} \quad \check{\epsilon}_3(\check{q}) \rightarrow \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) = 2(1 - \check{q}^2/4) \quad (98)$$

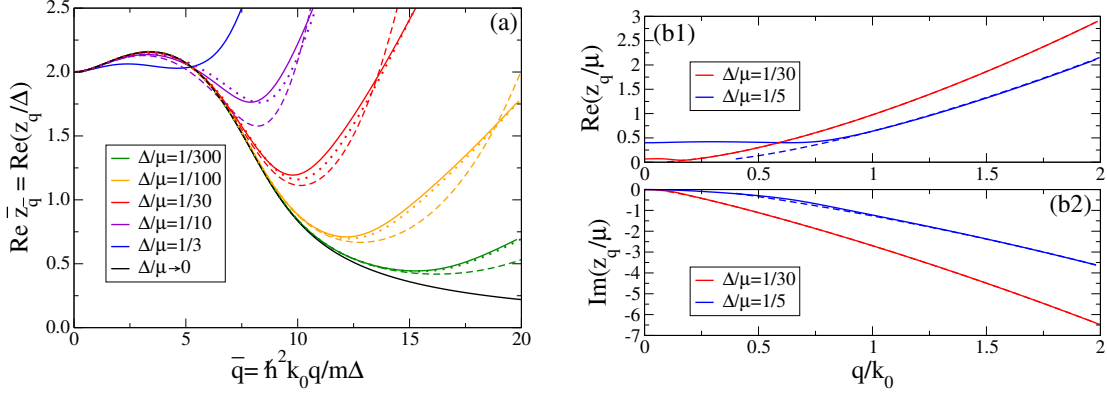


Figure 5: In the limit $\Delta/\mu \ll 1$, convergence of the continuum collective branch $q \mapsto z_q$ (a) at fixed $\bar{q} = \hbar^2 k_0 q / m \Delta$ to the limiting law $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$, where $\bar{z}_q^{(0)}$ is solution of equation (34), and (b) at fixed $\bar{q} = q/k_0$ to the leading order law $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$ defined by equation (102). In (a), restricted for simplicity to the real part of z_q , in solid line: exact dispersion relation, obtained by numerical solution of equation (76) (in color), or equation (34) for $\Delta/\mu \rightarrow 0$ (black); dashed: dispersion relation to second order in Δ (111); roughly dotted: prediction \bar{z}_q^{min} (118) of the second degree equation (117) on z_q . In (b1) for the real part and (b2) for the imaginary part: in solid lines, exact dispersion relation; in dashed line: leading order law (102) (for $\Delta/\mu = 1/30$, the dashed line is present but it is masked by the solid line). The values of Δ/μ used are specified in the figure.

However, the computation of the spectral densities of table 2 when $\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed energy $\check{\epsilon}$ brings up a *new* kink $\check{\epsilon}_0(\check{q}) = \check{q}(2 + \check{q})$, located, depending on the position of \check{q} with respect to $2/3$, between $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ and $\check{\epsilon}_3(\check{q})$ or beyond $\check{\epsilon}_3(\check{q})$:

$0 < \check{q} < 2/3$	$0 < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{q}(2 + \check{q})$	$\check{q}(2 + \check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon}$	(99)
$\check{\rho}_{ss}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{2\check{q}}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}[(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2} + (\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}]$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$	
$\check{\rho}_{+-}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	0	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} - \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}[(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2} - (\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}]$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$	
$2/3 < \check{q} < 2$	$0 < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{q}(2 + \check{q})$	$\check{q}(2 + \check{q}) < \check{\epsilon}$	
$\check{\rho}_{ss}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{2\check{q}}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$	
$\check{\rho}_{+-}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	0	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} - \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$	

This additional kink remains simple to interpret: as we can see on (59), the polynomial $P_8(X)$ has for $\check{\Delta} = 0$ two positive real roots, one is $\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$ as it should be, and the other is precisely $\check{\epsilon}_0(\check{q})$; the fact that the first root is always less than the second, while $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ is the largest real root of $P_8(X)$ at nonzero $\check{\Delta}$, is only a paradox that the last sentence of footnote 21 explains perfectly. Then let's take the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed \check{z} in expression (50, 51) of the matrix elements of M , using (99) and the limiting behavior $C(\Delta) = 2\pi[\ln(8/\check{\Delta}) - 2] + o(1)$ of the regularization scoria. We come across energy integrals that are fairly simple but a little long to calculate; after analytic continuation of type II as in (76), we finally find for $\text{Im} \check{z} < 0$ to zero order in $\check{\Delta}$:

$$\check{M}_1(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{z} \text{ and } \check{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \check{M}_1^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + o(1) \quad \text{with} \quad \check{M}_1^{(0)}(\check{z}, \check{q}) = \begin{pmatrix} \alpha(\check{z}) & \beta(\check{z}) \\ \beta(\check{z}) & \alpha(\check{z}) \end{pmatrix} \quad (100)$$

The eigenenergy equation therefore separates into $\alpha + \beta = 0$ and $\alpha - \beta = 0$; as we can verify, the first of the two equations contains the continuum mode, and it is therefore the only one that we will write explicitly here:

$$(2\pi)^2[\alpha(\check{z}) + \beta(\check{z})] = \ln\left(\frac{8}{\check{\Delta}e}\right) + \frac{\check{z}}{4\check{q}}[\ln(\check{z} + 2\check{q} - \check{q}^2) - \ln(\check{z} - 2\check{q} - \check{q}^2) - 2i\pi] - \left(\frac{\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})}{2}\right)^{1/2} \left\{ \text{argth} \frac{[2(\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}))]^{1/2}}{\check{q} + 2} + \text{argth} \frac{2 - \check{q}}{[2(\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}))]^{1/2}} \right\} \quad (101)$$

As we can see, there remains in the equation a logarithmic dependence with the rescaled order parameter $\check{\Delta}$. The eigenenergy thus has a well defined zero order in $\check{\Delta}$, but not a finite limit. We write to summarize:

$$\boxed{\check{z}_q \stackrel{\check{q} \text{ fixed}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\sim}} \check{z}_q^{(0)} + o(1) \quad \text{with} \quad \alpha(\check{z}_q^{(0)}) + \beta(\check{z}_q^{(0)}) = 0} \quad (102)$$

By numerical solution, we obtain the dashed curves in figures 5b1 and 5b2, in remarkable agreement with the exact result except in the neighborhood of $\check{q} = 0$, although the values of $\check{\Delta}$ chosen are not extremely small. We also obtain analytically the behavior of the mode eigenenergy to order zero at low wave number:

$$\check{z}_q^{(0)} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \check{\zeta}_0 \check{q} + \check{\zeta}_1 \check{q}^2 + o(\check{q}^2) \quad \text{with} \quad \begin{cases} \check{\zeta}_0 = -2iY_0|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} = 2\mathcal{Z}_0|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} \\ \check{\zeta}_1 = -\left. \frac{Y_0 \left[\ln \frac{\check{\Delta}}{8} + \left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0 \right) Y_0 \right]}{\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0} \right|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} \end{cases} \quad (103)$$

where Y_0 is solution of the transcendental equation (44). It is understood that the limits $\check{\Delta} \rightarrow 0$ and $\check{q} \rightarrow 0$ do not commute. One can wonder however, in the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$, if the regimes $\check{q} = 2\check{q}/\check{\Delta} \gg 1$ and $\check{q} \ll 1$ are connected. By comparing the coefficients of the asymptotic expansion (43) of section 3 and of the Taylor expansion (103), we find that the imaginary parts perfectly match to dominant order q (we find in (103) the coefficient \mathcal{Z}_0 of (43)), but the real parts do not match at all, even in terms of their power law ($1/\check{q}$ and \check{q}^2 have different exponents -1 and $+2$ in q); this very interesting fact will be exploited and explained in section 4.6.3. We also obtain the asymptotic expansion of eigenenergy in the logarithm of the order parameter:

$$\check{z}_q^{(0)} \underset{\ln \frac{1}{\check{\Delta}} \rightarrow +\infty}{\stackrel{\check{q} \in]0, 2[\text{ fixed}}{\sim}} -\frac{2i\check{q}}{\pi} \ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} + \frac{\check{q}^{3/2} e^{-i\pi/4}}{\pi^{1/2}} \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{1/2} + \frac{\check{q}^2}{4} + \frac{e^{i\pi/4}}{2} (\pi\check{q})^{1/2} \left(1 - \frac{3\check{q}^2}{16} \right) \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{-1/2} - \frac{4}{3} \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{-1} + O \left(\ln \frac{1}{\check{\Delta}} \right)^{-3/2} \quad (104)$$

The logarithm is never very large in a cold atom gas, the practical interest of (104) is quite small, although we went to an unreasonably high order. We get from it however, by removing all rescaling, a very suggestive equivalent in the mathematical limit of weak interaction²⁵

$$\boxed{z_q \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\stackrel{q \in]0, 2k_F[\text{ fixed}}{\sim}} -\frac{i\hbar^2 q}{2m|a|}} \quad (105)$$

where, remember, a is the scattering length and k_F the Fermi wave number. Finally, to be complete, let us give the expression of the other observables of section 4.3 at zero order in $\check{\Delta}$ at fixed \check{q} , namely the residues in the phase channel $+$ and in the modulus channel $-$, as well as the relative phase in the superposition of these two channels maximizing the total residue:

$$\check{Z}_{\pm}^{(0)} = \frac{1/2}{\alpha'(\check{z}_q^{(0)}) + \beta'(\check{z}_q^{(0)})} = \frac{(4\pi)^2 \check{q} [\check{z}_q^{(0)} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})]}{[\check{z}_q^{(0)} + 2\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})][\ln(\check{z}_q^{(0)} + 2\check{q} - \check{q}^2) - \ln(\check{z}_q^{(0)} - 2\check{q} - \check{q}^2) - 2i\pi] - 4\check{q} \ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2}} \quad \text{and} \quad \theta^{(0)} = \arg 1 = 0 \quad (106)$$

These expressions result directly from the fact that the matrix residue in (77) is written after rescaling

$$\check{\mathcal{M}} = \frac{1/2}{\alpha'(\check{z}_q^{(0)}) + \beta'(\check{z}_q^{(0)})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

which shows that the continuum mode is, in this limit, a linear superposition with equal amplitudes of small phase and modulus deviations of the order parameter. Results (102) and (106) are shown in green solid line in figure 7 for a very small value of Δ/μ , which makes them very close to the exact result for a not too small reduced wave number \check{q} .

25. We used the BCS result $\check{\Delta} \sim 8e^{-2} e^{-\pi/2k_F|a|}$ when $k_F a \rightarrow 0^-$ and replaced k_0 by its limit k_F .

4.6.3. In the vicinity of the eigenfrequency minimum: the unexpected wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$

Our motivation to go beyond sections 4.6.1 and 4.6.2 was to understand the origin of the absolute minimum that we can see very well in the real part of the continuum collective branch in figure 5a, in weak coupling regime $\check{\Delta} \ll 1$. In particular, this minimum does not appear at all in the limiting dispersion relation $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$ obtained for $\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ in section 3.4 (see the black curve in figure 5a), to our dissatisfaction. This led us to the discovery of the non-trivial wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, as we expose it here.

The first idea to account for the minimum at $\check{q} = \check{q}_{\min} > 0$ in figure 5a is to go to next order in the small parameter $\check{\Delta}$. At fixed \bar{q} and $\bar{z} = z/\Delta$, we therefore continue the expansion of the matrix elements of \check{M} , to order one for the phase-modulus coupling and to order two for the modulus-modulus coupling:

$$\check{M}_{--}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\bar{z} \text{ and } \bar{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) + \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q}) + o(\check{\Delta}^2) \quad \text{and} \quad \check{M}_{+-}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\bar{z} \text{ and } \bar{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q}) + o(\check{\Delta}) \quad (108)$$

The zero order appears, in non-dimensionless integral form, in equation (31). The rest of the calculation, which is a bit long, is based on integral representations (50, 55). Let's give the result, explicit:²⁶

$$\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{\pi \check{\Delta} \bar{z}}{2(2\pi)^3} \left[\ln \frac{\check{\Delta}}{8e} + \phi(\bar{z}, \bar{q}) \right] \quad \text{with} \quad \phi(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \frac{(4 + \bar{q}^2 - \bar{z}^2)^{1/2}}{(\bar{z}^2 - \bar{q}^2)^{1/2}} \arccos \frac{(4 + \bar{q}^2 - \bar{z}^2)^{1/2}}{2} \quad (109)$$

$$\check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q}) = -\frac{\pi \check{\Delta}^2}{16(2\pi)^3} \left[(\bar{q}^2 + \bar{z}^2 - 4) \ln \frac{\check{\Delta} e^{1/2}}{8} - \frac{\bar{q}^2(\bar{q}^4 + (4 - \bar{z}^2)\bar{q}^2 + 8\bar{z}^2)}{(\bar{z}^2 - \bar{q}^2)^2} + \frac{\bar{z}^6 - (4 + \bar{q}^2)\bar{z}^4 + \bar{q}^2(16 - \bar{q}^2)\bar{z}^2 + \bar{q}^6}{(\bar{z}^2 - \bar{q}^2)^2} \phi(\bar{z}, \bar{q}) \right] \quad (110)$$

Note the appearance of logarithmic terms in $\check{\Delta}$, and the fact that the function $\phi(\bar{z}, \bar{q})$, introduced for simplicity, has, in terms of the variable \bar{z} , no branch cut on the interval $[\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2^{(0)}] = [2, (4 + \bar{q}^2)^{1/2}]$, so the first order correction to M_{+-} and the second order correction to M_{--} are analytic and their continuation of type II to the lower complex half-plane is all done, $\check{M}_{+-\downarrow}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q}) = \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q})$ and $\check{M}_{--\downarrow}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q}) = \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q})$. For the phase-phase coupling, it will not be useful to go beyond the zero order, already given in the integral form (33). Although the phase-modulus coupling is first order in $\check{\Delta}$, it appears squared in the eigenenergy equation (76); the first eigenenergy correction is therefore second order:

$$\bar{z}_q \stackrel{\bar{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \bar{z}_q^{(0)} + \bar{z}_q^{(2)} + o(\check{\Delta}^2) \quad \text{with} \quad \left[\frac{\bar{z}_q^{(2)}}{\bar{z}_q^{(0)}} + \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}_q^{(0)}) \right] \check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) = [\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})]^2 \quad (111)$$

To obtain this expression, it was enough to replace in (76) M_{+-} and M_{++} by their dominant behavior taken at unperturbed energy (after analytic continuation of type II for M_{++}); in the second order term of M_{--} , see (108), we could do the same, but in the zero order contribution (after analytic continuation of type II), we had to do a first order Taylor expansion:

$$\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = \check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + (\bar{z}_q - \bar{z}_q^{(0)}) \frac{d}{d\bar{z}} \check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + \dots \quad (112)$$

then use relations (34, 94). In other words, the first correction to the universal dispersion relation $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$ of the weak coupling limit results from two physical effects, *a priori* of the same importance: (i) the effect of the phase-modulus coupling, completely ignored in section 3.4, and (ii) a correction to the equation in the modulus channel, that is to say to the modulus-modulus coupling, also omitted.

26. To calculate $\check{M}_{+-}^{(1)}$, we split in rescaled (50) the integration domain into two sub-intervals $I_< = [\check{\epsilon}_2(\check{q}), \eta]$ and $I_> = [\eta, +\infty[$ where $\eta \ll 1$ is fixed. On the first one, we expand the integrand in powers of $\check{\Delta}$ at fixed $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}/\check{\Delta}$. On the second one, we expand at fixed $\bar{\epsilon}$. To do this, you must expand the roots s_1 and s_2 of (71). On $I_<$, $s_{1,2} \approx \mp s_0 - A\check{\Delta}$ with $s_0^2 = \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 - 4 - \bar{q}^2)/[(\bar{\epsilon}^2 - 4)(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)]$ and $A = \bar{\epsilon}^2\bar{q}^2/[(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)^2]$ so that $\check{\rho}_{+-} \sim \frac{\pi}{4}\check{\Delta}\bar{\epsilon}(\bar{\epsilon}^2 - 4 - \bar{q}^2)^{1/2}/(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)^{1/2}$. On $I_>$, $s_{1,2} \approx \mp 1 - \bar{q}^2\check{\Delta}^4(\bar{\epsilon} \mp 2)/\bar{\epsilon}^4$ hence $\check{\rho}_{+-} \sim \frac{\pi}{2}[(1 + \bar{\epsilon}/2)^{1/2} - \Theta(2 - \bar{\epsilon})(1 - \bar{\epsilon}/2)^{1/2}]$. Integration on energy brings up formally divergent terms of the form $\check{\Delta} \ln \eta$, which exactly cancel between the upper and lower parts, and we obtain (109). The calculation of $\check{M}_{--}^{(2)}$ proceeds in the same way, starting from the clever form (55), but it is heavier: (i) you must add the subinterval $[\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2(\check{q})]$, on which there is however no deviation from the spectral density $\rho_{--}^{(0)[II]}$ of table 1, (ii) on $I_<$, you have to expand $s_{1,2}$ up to order $\check{\Delta}^2$, to get $\check{\rho}_{--} - \check{\rho}_{--}^{(0)[III]} \sim -\frac{\pi}{32}\check{\Delta}^2(\bar{\epsilon}^2 - 4 - \bar{q}^2)^{1/2}[\bar{\epsilon}^6 - (4 + \bar{q}^2)\bar{\epsilon}^4 - \bar{q}^2(\bar{q}^2 - 16)\bar{\epsilon}^2 + \bar{q}^6]/(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)^{5/2}$, (iii) on $I_>$, you have to expand $s_{1,2}$ up to order $\check{\Delta}^6$ to get $\check{\rho}_{--} = \frac{\pi}{2}[(1 + \bar{\epsilon}/2)^{1/2} + \Theta(2 - \bar{\epsilon})(1 - \bar{\epsilon}/2)^{1/2}] - \frac{\pi\check{\Delta}^2}{32\sqrt{2}\bar{\epsilon}^2} \left[\frac{\bar{q}^2\bar{\epsilon}^2 + 48\bar{\epsilon} + 64}{(2 + \bar{\epsilon})^{1/2}} + \Theta(2 - \bar{\epsilon}) \frac{\bar{q}^2\bar{\epsilon}^2 - 48\bar{\epsilon} + 64}{(2 - \bar{\epsilon})^{1/2}} \right] + O(\check{\Delta}^4)$.

Let us analyze result (111) in simple limiting cases. At low \bar{q} , the dominant contribution to the energy correction is quadratic in wave number and comes from phase-modulus coupling, that coming from $M_{--}^{(2)}$ being only cubic. We thus find

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)}|_{M_{+-}^{(1)}} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\check{\Delta}^2 \bar{q}^2}{2\pi^2} \frac{\zeta_0^2}{\zeta_0 - 1} \left(\ln \frac{\check{\Delta}}{8e} \right)^2 \quad (113)$$

which reproduces the term of order $\check{\Delta}^2$ of the quadratic-start coefficient of the continuum collective branch, see (86). At large \bar{q} , the calculation is simple when we have explicit expressions, and we get the dominant order in \bar{q} :

$$\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} -\frac{i\pi\check{\Delta}Y_0\bar{q}}{2(2\pi)^3} \ln \frac{\check{\Delta}\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}}{8e} \quad \text{and} \quad \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} -\frac{\pi\check{\Delta}^2\bar{q}^2(1-Y_0^2)}{16(2\pi)^3} \left\{ \pi \ln \check{\Delta} + \ln \left[\frac{\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}e^{1/2}}{8} \right] - (1-Y_0^4)^{-1} \right\} \quad (114)$$

where Y_0 is given by (44). The calculation is more laborious on integral forms: at $\bar{z} \approx \bar{q} \approx \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, the zero order matrix elements $\check{M}_{++}^{(0)}$ and $\check{M}_{--}^{(0)}$ behave in the same way to dominant order in \bar{q} ,²⁷ therefore at this order both vanish when $\bar{z} = \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$: we work a lot for a zero result... It is therefore clever to work directly on the difference between (33) and (31), by setting $\check{D}(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \check{M}_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$. So, after analytic continuation and always to leading order in \bar{q} ,²⁸ we obtain in terms of the Bose function $g_2(z)$:

$$\check{D}_{\downarrow}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} \frac{8\pi}{(2\pi)^3 Y_0 \bar{q}^2} \left\{ \pi \ln(-2i\bar{q}Y_0) - \ln[\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}] \operatorname{atan}\left(\frac{1}{Y_0}\right) - \operatorname{Im} g_2\left(\frac{1}{iY_0}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} g_2\left(\frac{2}{iY_0+1}\right) \right\} \quad (115)$$

The behavior of the residue $\check{Z}_{-}^{(0)}$ at large wave number is in (96). We deduce from all this that again, the phase-modulus coupling brings the dominant correction of order $\check{\Delta}^2$ to the continuum collective branch and we can keep

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} \check{Z}_{-}^{(0)} \frac{[\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q})]^2}{\check{D}_{\downarrow}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})} \approx \check{\Delta}^2 \bar{q}^5 \quad (116)$$

At intermediate wave numbers, $\bar{q} \approx 1$, it turns out that the phase-modulus coupling contribution to $\operatorname{Re} \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)}$ in (111) vanishes, the point where it vanishes depending little on $\check{\Delta}$ and remaining close to $\bar{q} = 5$ for the parameters of figure 5a. The contribution of $M_{--}^{(2)}$ to this observable is certainly no longer negligible compared to that of $M_{+-}^{(1)}$ but it remains small in absolute value, and we can ignore it in practice; this explains why the different solid lines (including the black limiting curve) seem to intersect at $\bar{q} \approx 5$ in the figure.

As we can judge in figure 5a, by comparing the dashed curves to those in solid line, the calculation (111) of $\bar{z}_{\bar{q}}$ to second order in $\check{\Delta}$ explains the existence of a minimum on $\operatorname{Re} z_q$, but in a more qualitative than quantitative way. In particular, it fails to properly describe the rise in the curve beyond the minimum, the agreement with the numerical results in this area not even improving at very weak coupling. The problem comes from the approximation $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}, \bar{q}) \approx \check{M}_{++\uparrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})$ made in equation (111). Indeed, as we said, $\check{M}_{++}^{(0)}$ and $\check{M}_{--}^{(0)}$ evaluated in $\bar{z} \approx \bar{q}$ are equivalent and of order $\approx \bar{q}^0$ at large \bar{q} ; as $\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}$ vanishes by construction in $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}$ is abnormally weak at this point, that is to say of order \bar{q}^{-2} as we read it on (115), rather than of order \bar{q}^0 as you might expect. In this case, we must write $\check{M}_{++\downarrow} = \check{D}_{\downarrow} + \check{M}_{--\downarrow}$, approximate the small contribution \check{D}_{\downarrow} by its value in $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ but make on the remaining bit $M_{--\downarrow}$ the same Taylor expansion as in equation (112). We can also omit the correction $M_{--}^{(2)}$, which we showed in the previous paragraph to be very small at any \bar{q} and even sub-leading at large \bar{q} . We finally replace the first degree equation (111) with a second degree equation (trinomial) on $\bar{z}_{\bar{q}}$, hence the notation « trin » in exponent:²⁹

$$\frac{(\bar{z}_{\bar{q}}^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)})}{\check{Z}_{-}^{(0)}} \left[\frac{\bar{z}_{\bar{q}}^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}}{\check{Z}_{-}^{(0)}} + \check{D}_{\downarrow}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \right] = [\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})]^2 \quad (117)$$

27. After analytic continuation, they are both equivalent up to a constant factor to $\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q})$, as in (40).

28. We come across integrals like those I and J of footnote 9, that we treat in the same way.

29. By anticipating the law $\bar{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{-1/3}$, we check around the minimum that the imaginary parts of the two terms in square brackets in (117) are effectively of the same order of magnitude $\approx 1/\bar{q}_{\min}^2$; we have to consider their imaginary part here because we want to access the real part of $(\bar{z}_{\bar{q}}^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)})$ in prefactor of the square brackets; however the residue in the denominator of this prefactor is purely imaginary to leading order in \bar{q} and the right-hand side of (117) is real.

The correct solution of the equation is written

$$\boxed{\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} = -\frac{1}{2}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + \eta \left[\frac{1}{4}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2}} \quad (118)$$

where the sign η is that of $\text{Re } \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})$, positive for \bar{q} large enough, negative for \bar{q} small enough. The corresponding prediction, shown in dotted lines in figure 5a, is in good agreement with the exact results, an agreement all the better since $\check{\Delta}$ is weaker, even in the rise beyond the minimum. When we move away from the minimum in the direction of increasing \bar{q} , the contribution of \check{D}_\downarrow in (118) becomes more and more negligible and the rise in the curve takes the simple form³⁰

$$\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} \Big|_{\bar{q} \gg \bar{q}_{\min}} = -\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) - \frac{1}{2}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + \dots \quad (119)$$

When we move away from the minimum in the direction of decreasing \bar{q} , the contribution of \check{D}_\downarrow becomes dominant and (117) is reduced to expansion (111) (up to the omission of $\check{M}_{-}^{(2)}$), which is therefore only retrospectively applicable at $\bar{q} \ll \bar{q}_{\min}$. To be complete, we give the expression taken from (117) of the residues in the phase and modulus channels,³¹ as well as the relative phase in the superposition of these two channels maximizing the global residue:

$$\theta^{\text{trin}} = \arg \left(\frac{-\bar{Z}_-^{(0)} \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})}{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}} \right) \quad \text{and} \quad \bar{Z}_\pm^{\text{trin}} = \frac{1}{2}\bar{Z}_-^{(0)} \mp \eta \frac{\bar{Z}_-^{(0)} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})/4}{\left[\frac{1}{4}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2}} \quad (120)$$

Let us now proceed to the in-depth study of the real part of the continuum collective branch in the vicinity of its minimum at $q = q_{\min} > 0$ in the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$. For this, we must first determine the scale law of q_{\min} . A first way to do this is to say that $\bar{z}_q^{(0)} \approx \bar{z}_q^{(2)}$ at $q = q_{\min}$, which, taking into account (43) and (116), leads to $\bar{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{-1/3}$ so that $\check{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, which is the unexpected wave number scale announced in the title of this section 4.6.3. A second way is to require that $\check{D}_\downarrow \approx \check{M}_{+-}^{(1)}$ in the expression between square brackets in (118), which, given (114) and (115), leads to the same result. We deduce that $\text{Re } \bar{z}_{q_{\min}} \approx \check{\Delta}^{1/3}$ or $\text{Re } \check{z}_{q_{\min}} \approx \check{\Delta}^{4/3}$. The rescaling of the dispersion relation adapted to the new scale will be indicated by a hat. So we first put $\hat{q} = \check{\Delta}^{2/3} \hat{q}$, that is to say $\bar{q} = 2\check{\Delta}^{-1/3} \hat{q}$. Then we obtain the expression of the real part of the branch thus rescaled to leading order in the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed \hat{q} , by working a little on (117):³²

$$\text{Re } \check{z}_q \Big|_{\substack{\hat{q} \text{ fixed} \\ \check{\Delta} \rightarrow 0}} \check{\Delta}^{4/3} \left[\text{Re } \hat{z}_q^{(0)} + o(1) \right] \quad \text{with} \quad \text{Re } \hat{z}_q^{(0)} = -\frac{(2\pi)^2 \check{q} \check{\Delta}^{-1/3}}{\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0} \text{Im} \left[\frac{1}{4} \check{D}_\downarrow^{\text{asypm}}(\hat{z}_q^{(0)}, \hat{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1), \text{asypm}}(\hat{z}_q^{(0)}, \hat{q})^2 \right]^{1/2} \quad (121)$$

where $\check{D}_\downarrow(\hat{z}_q^{(0)}, \hat{q})$ and $\check{M}_{+-}^{(1)}(\hat{z}_q^{(0)}, \hat{q})$ have been replaced by their dominant order (115) and (114) at large \hat{q} , as it was also necessary to do for $\bar{Z}_-^{(0)}$ using (96), and as indicated by the exponent « asypm ». The wave number dependence of result (121) unfortunately remains rather obscure, since Y_0 in (44) has no simple dependence on \bar{q} .³³ To progress, let's make the clever change of variable

$$\hat{q} \equiv \frac{\pi \kappa}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \quad \text{with} \quad \varepsilon \equiv \check{\Delta}^{2/3} \quad (122)$$

30. There is a $-$ sign before the term $\check{M}_{+-}^{(1)}$ in (119) because, for $1 \ll \bar{q} \ll 1/\check{\Delta}$, its imaginary part is positive, its square is negative and $\text{Im}(\check{D}_\downarrow^2) < 0$.

31. We obtain the derivative of the analytically continued determinant of M by taking the derivative of the left-hand side of (117) with respect to \bar{z}_q^{trin} ; the right-hand side is constant and gives zero contribution.

32. An important simplification comes from the fact that to leading order in \bar{q} , $\text{Re } \bar{z}_q^{(0)} = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{Z}_-^{(0)} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})]$.

33. On the other hand, we know how to express \bar{q} as a function of Y_0 , and (121) has a complicated explicit form in terms of Y_0 .

then make ε tend to zero at fixed κ in (121). The dominant order in $|\ln \varepsilon|$ is simple to calculate,³⁴

$$\operatorname{Re} \tilde{z}_{\tilde{q}}^{(0)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\overset{\kappa \text{ fixed}}{\sim}} \begin{cases} \frac{2\pi}{|\ln \varepsilon|^{1/3}} \frac{1}{(4\kappa^2 - \kappa^8)^{1/2}} & \text{if } \kappa < 2^{1/3} \\ |\ln \varepsilon|^{2/3} \frac{(\kappa^6 - 4)^{1/2}}{2\kappa} & \text{if } \kappa > 2^{1/3} \end{cases} \quad (123)$$

and reaches its minimum at $\kappa = 1$. After returning to the original dimensionless variables (58), it leads to the very beautiful equivalents

$$\check{q}_{\min} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi\varepsilon}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} \check{z}_{q_{\min}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\pi\varepsilon^2}{3^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/3}} \quad (124)$$

shown in solid lines in figure 6, and which are already quite close to the exact values (symbols). We pushed the computation to the sub-sub-leading order in (121), the small expansion parameter being $1/|\ln \varepsilon|$:³⁵

$$\check{q}_{\min} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\pi\varepsilon}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \left[\frac{c_1 + (c_1^2 - c_2)|\ln \varepsilon|^{-1}}{c_1 - c_2|\ln \varepsilon|^{-1}} + O(w^\alpha |\ln \varepsilon|^{-3}) \right] \quad (125)$$

$$\operatorname{Re} \check{z}_{q_{\min}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2\pi\varepsilon^2}{3^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/3}} \left[\frac{1}{1 - d_1|\ln \varepsilon|^{-1} + (d_1^2 - d_2)|\ln \varepsilon|^{-2}} + O(w^\alpha |\ln \varepsilon|^{-3}) \right] \quad (126)$$

where we introduced $w = \ln(2|\ln \varepsilon|^{1/3})$, coefficients c_n and d_n functions of w ,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{19}{24} - \frac{1}{3}w & c_2 &= \frac{959}{1152} + \frac{5\pi^2}{18} + 2\ln 2 + 4\ln^2 2 + \left(\frac{5}{12} - 4\ln 2\right)w + \frac{8}{9}w^2 \\ d_1 &= 3 + 2\ln 2 - \frac{5}{3}w & d_2 &= \frac{1223}{144} - \frac{2\pi^2}{9} + 12\ln 2 - \left(\frac{115}{9} + \frac{10}{3}\ln 2\right)w + \frac{23}{9}w^2 \end{aligned} \quad (127)$$

and we leave the exponent α undetermined in the error terms. Of course, these coefficients are those of the expansion in powers of $|\ln \varepsilon|^{-1}$ of the expressions in square brackets in (125, 126), but we preferred to write the result in the Padé form (1,1) or (0,2) because this greatly improves the speed of convergence with $|\ln \varepsilon|^{-1}$: dashed lines in figure 6 already agree very well with numerical results for modest values of μ/Δ .

Finally, it must be verified that, in the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$, no wavelength scale of the continuum collective branch has been forgotten between the new $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ and the old $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$.³⁶ Analytically, we get from (119), limited to the first term in its right-hand side, that $\operatorname{Re} \check{z}_{\tilde{q}}^{(0)} \sim \check{\zeta}_1 \check{q}^2$ at large wave numbers compared to the new scale, $\check{q} \gg \check{\Delta}^{2/3}$ in other words $\check{q} \gg 1$, where $\check{\zeta}_1$ is exactly the same coefficient as in expansion (103) of $\operatorname{Re} \check{z}_{\tilde{q}}^{(0)}$ at low wave numbers compared to the old scale, $\check{q} \ll \check{\Delta}^0$: the connection is perfect. Numerically, we produced the synthetic figure 7, fairly mathematical given the very small value of $\check{\Delta}$ chosen, but which shows how the prediction (117) on \check{z}_q and its derived predictions (120) on the residues and the optimal phase-modulus relative phase interpolate beautifully between the predictions at the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}$ in section 4.6.1 and those at the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ in section 4.6.2, all agreeing very closely to the numerical results in their validity regime.

4.7. The continuum collective branch for $\Delta/\mu \gg 1$

In the vicinity of the chemical potential zero, on the positive side, we find that the continuum collective branch (for an analytic continuation of type II) presents two scales of variation with wave number, that $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ fixed by the

34. Let's also give $\operatorname{Im} \check{z}_{\tilde{q}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\overset{\kappa \text{ fixed}}{\sim}} -\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/3} \kappa$, taken from (117) and in agreement with (43, 44) since at this order $\operatorname{Im} \check{z}_{\tilde{q}}^{\text{trin}}$ is dominated by $\operatorname{Im} \check{z}_{\tilde{q}}^{(0)}$. This means that to leading order, $\check{z}_{\tilde{q}}$ is pure imaginary of order ε^{-1} . The relative error in these expressions, including (123), is $O((\ln |\ln \varepsilon|)^\alpha / |\ln \varepsilon|)$, where the value of the exponent α does not matter.

35. Let's set $x = |\ln \varepsilon|^{-1/3} \rightarrow 0$ and $\eta = \ln(\kappa/x)$. From the expansion $\pi Y_0 = \frac{1}{2x^3} + \eta + 2\eta x^3 + O(\eta^2 x^6)$ we get for $\kappa < 2^{1/3}$: $\operatorname{Re} \check{z}_{\tilde{q}}^{(0)} = \frac{2\pi x}{\kappa(4-\kappa^6)^{1/2}} \left[1 + \frac{x^3}{4-\kappa^6} (b_0 + b_6 \kappa^6) + \frac{x^6}{(4-\kappa^6)^2} (c_0 + c_6 \kappa^6 + c_{12} \kappa^{12}) + O(x^9 \eta^3) \right]$ with $b_0 = 8(1-\eta)$, $b_6 = 1 + \ln 2 + 3\eta$, $c_0 = 64(1-3\eta + \eta^2)$, $c_6 = 34 - 2\pi^2 + 4\ln 2 - 6\ln^2 2 + 4(25 + 7\ln 2)\eta - 46\eta^2$ and $c_{12} = 1 + 8\ln 2 + 3\ln^2 2 - 4(1 + \ln 2)\eta + 9\eta^2$.

36. We have already seen how (117) is connected to the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}$. Indeed, if $\check{q} \approx \check{\Delta}$, we have $\check{q} \ll \check{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{2/3}$. However, as it is said below (119), equation (117) for $\check{q} \ll \check{q}_{\min}$ is essentially reduced to (111), therefore gives the right behavior of \check{z}_q for $\check{q} \approx \check{\Delta}$.

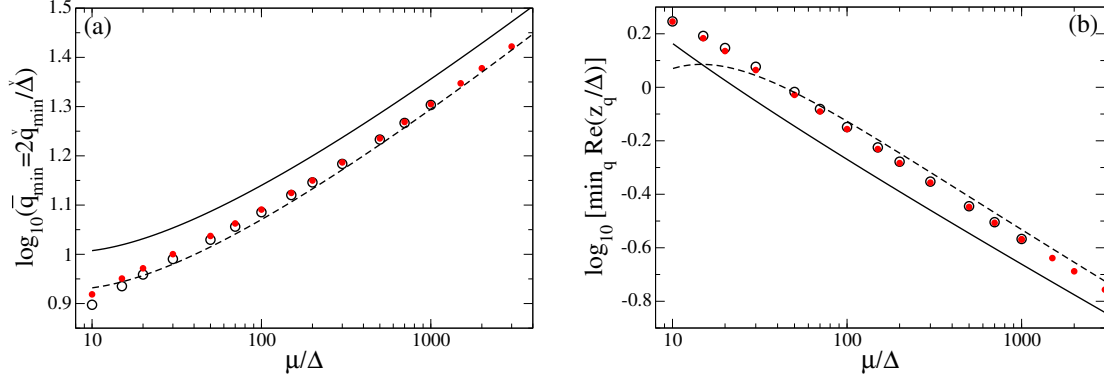


Figure 6: For interactions of zero range (case of cold atoms) in weak coupling regime, position q_{\min} (a) and value $\text{Re } z_{q_{\min}}$ (b) of the minimum of the real part of the continuum collective branch $q \mapsto \text{Re } z_q$ for an analytic continuation of type II, as functions of the inverse of the order parameter. Black circles: exact values from a numerical solution of equation (76). Red disks: predictions of the quadratic equation (118) on z_q . Solid black line: asymptotic equivalents (124). Black dashed line: Padé approximants (125) and (126). These last two elements belong to the unexpected wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$.

width of the branch existence interval (section 4.7.1) and that $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ required by the quadratic approximation (82) of the branch (section 4.7.2). These two regimes are perfectly connected as we will see, there is no other wave number scale to consider.

4.7.1. At the wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

We make here $\check{\Delta}$ tend $+\infty$ with fixed reduced wave number \check{q} , by postulating a finite-limit difference between the branch and the edge of the broken pair continuum:

$$\check{z}_q - 2\check{\Delta} \equiv \check{Z}_{\check{q}} \stackrel{\check{q} \text{ fixed}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} \check{\Delta}^0 \quad (128)$$

as suggested by the numerical results in figure 4 and the quadratic approximation (82, 86) written in the limit (91) of its domain of validity. To obtain an equivalent of the matrix elements of \check{M} , we return to their integral formulation (7, 8) in the space of relative wave vectors \mathbf{k} of the broken pair, with the integration domain \mathcal{D} replaced by \mathbb{R}^3 of course. We can identify *a priori* three natural energy scales $\epsilon_{\mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2} \approx \epsilon_{\mathbf{k}}$ in these integrals, so three wave number scales \check{k} :

$$(a) : \check{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \check{\Delta} \approx \check{\Delta}^{-1} \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^0 \quad ; \quad (b) : \check{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \check{\Delta} \approx \check{\Delta}^0 \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^{1/4} \quad ; \quad (c) : \check{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \check{\Delta} \approx \check{\Delta} \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^{1/2} \quad (129)$$

and three corresponding changes of variable

$$\check{k} = \check{\Delta}^0 \check{K}_a = \check{\Delta}^{1/4} \check{K}_b = \check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c \quad (130)$$

To obtain the dominant contribution to the integrals of the first (a), the second (b) or the third scale (c), you must make $\check{\Delta}$ tend to $+\infty$ for fixed values of \check{K}_a , \check{K}_b or \check{K}_c in the integrand. In \check{M}_{ss} , scale (b) dominates and we fix \check{K}_b ; in the phase-modulus coupling, scale (c) wins and we fix \check{K}_c . We thus obtain the equivalents

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixed}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} \check{\Delta}^{3/4} \int_0^{+\infty} d\check{K}_b \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_b^2}{\check{Z} - \check{K}_b^4} = -\frac{(-\check{Z})^{-1/4} \check{\Delta}^{3/4}}{8\pi \sqrt{2}} \quad (131)$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixed}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} \check{\Delta}^{-1/4} \int_0^{+\infty} d\check{K}_b \frac{(2\pi)^{-2} \check{Z} \check{K}_b^2}{\check{Z} - \check{K}_b^4} = \frac{(-\check{Z})^{3/4} \check{\Delta}^{-1/4}}{8\pi \sqrt{2}} \quad (132)$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixed}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K}_c \frac{-(2\pi)^{-2}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2 \check{\Delta}^{1/2}}{\pi^{5/2}} \quad (133)$$

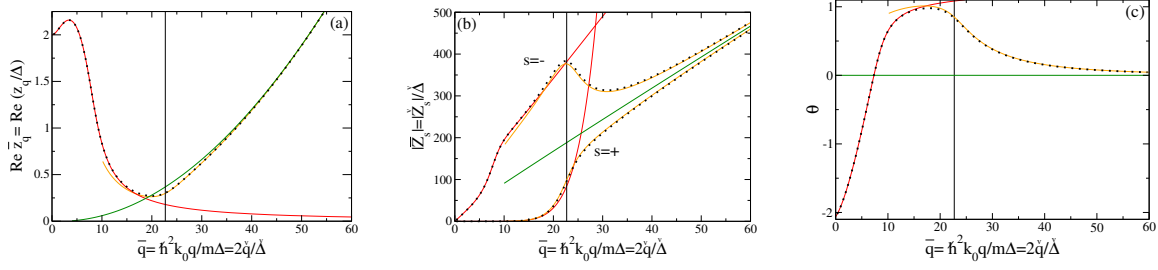


Figure 7: For a gas of fermions with zero-range interaction in the limit $\check{\Delta} = \Delta/\mu \rightarrow 0$, illustration of the unexpected wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ and its connection with the scales $\check{q} \approx \check{\Delta}$ and $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ on (a) the real part of the dispersion relation of the continuum mode of type II, (b) the spectral weights of the mode in the phase channel + and modulus channel - of the deviations of the order parameter from equilibrium and (c) the relative phase θ between the two channels maximizing the mode spectral weight according to equation (79). Big black dotted line: numerical solution of equation (76) and its insertion in the definition of Z_{\pm} below (77) and in (80). Solid red line: dominant order in $\check{\Delta}$ at the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$), namely the numerical solution of equation (34) and its insertion into expressions (94) and (97). Solid green line: dominant order in $\check{\Delta}$ at the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed $\check{q} = q/k_0$), namely expressions (102) and (106). Solid orange line: dominant order in $\check{\Delta}$ at the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ at κ fixed in the change of variable (122)), namely expressions (121) and (120) in which we wrote the coefficients to leading order in $\check{\Delta}$ as in equations (96), (114) and (115). Thin vertical line: wave number at the center of the scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, i.e. value of \check{q} corresponding to $\kappa = 1$. We took $\check{\Delta} = 1/1000$.

where the explicit value of the integrals is given for $\text{Im } \check{Z} < 0$, in a form adapted to the case to come, $\text{Im } \check{Z} \rightarrow 0^-$ at fixed $\text{Re } \check{Z} < 0$. In order to use the procedure of Nozières (12), we expand directly the nonzero spectral densities of type II in table 2,

$$\check{\rho}_{++}^{[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixed}} \frac{\pi^2 \check{\Delta}}{2\check{q}} \left[1 + \frac{\check{Z}}{4\check{\Delta}} + O\left(\frac{1}{\check{\Delta}^2}\right) \right] \quad \text{and} \quad \check{\rho}_{--}^{[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixed}} \frac{\pi^2 \check{Z}}{4\check{q}} \left[1 - \frac{\check{Z}}{8\check{\Delta}} + O\left(\frac{1}{\check{\Delta}^2}\right) \right] \quad (134)$$

We note then that the matrix elements \check{M}_{ss} are dominated by the Nozières term performing the analytic continuation, larger by a factor $\check{\Delta}^{1/4}$. This is disturbing and suggests a continuum mode very far from the experimentally accessible energy axis $\text{Im } z = 0^+$ therefore without much physical sense. The solution to leading order of the eigenenergy equation gives

$$\check{Z}_{\check{q}} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{q} \text{ fixed}} - \frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (135)$$

The real part of the energy of the mode is thus effectively outside the interval $[2\Delta, \epsilon_2(q)]$ of analytic continuation, which is also the interval of observability in the response functions of the system, within the meaning of section 4.3 (the energy $\epsilon_2(q)$ is given here by (63)). It should be remembered, the mode is not really in the physical gap $[0, 2\Delta]$ even if its real part is mathematically there; it is separated from it by the end of the original branch cut folded over $]-\infty, 2\Delta]$ by the procedure (12) [3].

Remarkably, the negative real result (135) coincides to leading order with the quadratic approximation in \check{q} of the branch, see equations (82) and (86): the quadratic approximation is valid everywhere, and the infinitesimal wave number scale for \check{q} predicted by its validity condition (91) does not appear. The situation changes on the next orders, the two expected wavelength scales appear and the condition (91) takes on its full meaning. The rather technical calculations are given in Appendix B.1. They are now multi-scales: we must include in the same matrix element \check{M}_{ss} scales (b) and (c), as well as the intermediate scale, denoted by (bc), deduced by geometric mean and requiring the change of variable $\check{k} = \check{\Delta}^{3/8} \check{K}_{bc}$. On the other hand, it is not necessary to treat apart scale (a) at the maximal order considered here (relative error $O(1/\check{\Delta})$ on \check{M}_{ss} and *in fine* on $\check{Z}_{\check{q}}$). Here is the result:

$$\check{z}_q - 2\check{\Delta} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{q} \text{ fixed}} = a_0 + a_1 \check{\Delta}^{-1/4} + a_2 \check{\Delta}^{-2/4} + a_3 \check{\Delta}^{-3/4} + O(\check{\Delta}^{-1}) \quad (136)$$

with

$$a_0 = -\frac{128}{\pi^5}[\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (137)$$

$$a_1 = 16 \cdot 2^{1/4} (4 - 3i\sqrt{2}) \check{q}^{5/2} [\Gamma(5/4)]^3 / \pi^{19/4} \quad (138)$$

$$a_2 = [9\sqrt{2}\pi + 16i(18 + 9\pi - \pi^3)] \check{q}^3 [\Gamma(5/4)]^2 / (3\pi^{11/2}) \quad (139)$$

$$a_3 = \left\{ -96(2\sqrt{2} + 3i)\pi^3 + [2\sqrt{2}(112\pi^3 - 2256 - 303\pi) + i(312\pi^3 - 5760 - 585\pi)] \check{q}^2 \right\} \frac{\check{q}^{3/2} \Gamma(5/4)}{48 \cdot 2^{3/4} \pi^{21/4}} \quad (140)$$

If we tried to use (136) for $\check{q} \rightarrow 0$, we would find the real dominant term as we said, but not the pure imaginary sub-leading term of the coefficient of the quadratic start in (86), since a_2 above tends to zero cubically in wave number. On the imaginary part of the dispersion relation, which varies to leading order as $\check{q}^{5/2}$, the quadratic-start range is reduced to zero at large $\check{\Delta}$, as predicted by (91), and we cannot exchange the limits $\check{q} \rightarrow 0$ and $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$. To be complete, let us give an expansion of the residues in the phase and modulus channels, and of the relative phase between these two channels corresponding to the maximum global residue:

$$|\check{Z}_-| \stackrel{\check{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} 16\check{q} \left[1 - \frac{(2\pi)^{1/4} \check{q}^{1/2}}{2\Gamma(1/4)\check{\Delta}^{1/4}} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \right], \quad |\check{Z}_+| \stackrel{\check{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{4[\Gamma(1/4)]^4 \check{q}^3}{\pi^5 \check{\Delta}} \quad \text{and} \quad \theta + \frac{\pi}{2} \stackrel{\check{q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} - \frac{(\pi/2)^{1/4} \check{q}^{1/2}}{\Gamma(1/4)\check{\Delta}^{1/4}} \quad (141)$$

4.7.2. At the wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$

To study the continuum branch of type II with reduced wave numbers $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ near the chemical potential zero, we set $\check{q} = \check{Q}\check{\Delta}^{-1/2}$ and let $\check{\Delta}$ tend to infinity at fixed \check{Q} . According to (91), the wave number scale considered is that of the validity limit of the quadratic approximation (82), which we can therefore use to find the energy scaling law. According to (86), the coefficient of \check{q}^2 in (82) is of the order $\check{\Delta}^0$, so that $\check{z}_q - 2\check{\Delta} \approx \check{\Delta}^{-1}$ and you have to set

$$\check{z} - 2\check{\Delta} \equiv \frac{\check{\zeta}}{\check{\Delta}} \quad (142)$$

It remains to take the limit $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$ in the matrix elements of $\check{M}(\check{z}, \check{q})$ at fixed $\check{\zeta}$ and \check{Q} . We proceed in the same way as in section 4.7.1, by distinguishing the three wave number scales (129) in the integral on the relative wave vector \mathbf{k} of a broken pair. We find that the diagonal elements \check{M}_{ss} are dominated by wave number scale (a), while the phase-modulus coupling \check{M}_{+-} is dominated by scale (c):

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{\zeta} \text{ and } \check{Q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \check{\Delta}^{+1} \int_0^{+\infty} d\check{K}_a \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_a^2}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} = \frac{-\check{\Delta}}{16\pi(-\check{\zeta})^{1/2}} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} + (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \quad (143)$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{\zeta} \text{ and } \check{Q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \check{\Delta}^{-1} \int_0^{+\infty} d\check{K}_a \frac{(2\pi)^{-2} \check{\zeta} \check{K}_a^2}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} = \frac{(-\check{\zeta})^{1/2}}{16\pi\check{\Delta}} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} + (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \quad (144)$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{\zeta} \text{ and } \check{Q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K}_c \frac{-(2\pi)^{-2}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} \quad (145)$$

where the explicit form of the integrals is suited to $\check{\zeta}$ close to a negative real number. The expansion of the spectral densities useful for the analytical continuation through the interval II is carried out directly from table 2:

$$\check{\rho}_{++}^{\text{II}}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{\zeta} \text{ and } \check{Q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2 \check{\Delta}^{3/2}}{2\check{Q}} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad \text{and} \quad \check{\rho}_{--}^{\text{II}}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{\zeta} \text{ and } \check{Q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2 \check{\zeta} \check{\Delta}^{-1/2}}{4\check{Q}} + O(\check{\Delta}^{-5/2}) \quad (146)$$

As in section 4.7.1, the diagonal matrix elements \check{M}_{ss} are much smaller than the spectral densities, this time by a factor $\approx \check{\Delta}^{1/2}$, and do not contribute to leading order to the analytically continued values $\check{M}_{ss\downarrow}$. By solving the eigenenergy equation (76), we find the equivalent

$$\check{z}_Q \sim -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{Q}^2 \quad \text{that is} \quad \check{z}_q - 2\check{\Delta} \stackrel{\check{Q} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (147)$$

In first approximation, the dispersion relation is real and coincides with its quadratic approximation, even for $\check{Q} \gg 1$. To put an end to this paradox, we must calculate the first correction, of relative order $\check{\Delta}^{-1/2}$. For the diagonal elements $\check{M}_{ss\downarrow}$, equations (143, 144) are sufficient. For non diagonal elements, in which the spectral density $\rho_{+-}^{(II)}$ is identically zero, it remains to determine the sub-leading order $\check{\Delta}^0$ of \check{M}_{+-} . This time, we must add the contribution of scale (a) to that of scale (c). The scale (b) contributes indirectly, that is, only in the form of a cut-off $\Lambda \check{\Delta}^{1/4}$ on the wave number \check{k} , where Λ is a positive arbitrary constant. It is a high (ultraviolet) cut-off for scale (a), without which the integral on \check{K}_a would diverge at infinity. It is also a low (infrared) cut-off for scale (c), without which the integral on \check{K}_c of the sub-leading term would diverge in zero. In the limit $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$, scale (b) thus combines the two sub-leading pieces in a Λ -independent way and we find the correction sought to (145), as detailed in Appendix B.2:

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) + \frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} \xrightarrow[\check{\Delta} \rightarrow +\infty]{\check{\zeta} \text{ and } \check{Q} \text{ fixed}} (2\pi)^{-2} \int_0^{+\infty} d\check{K} \left[\frac{\check{K}^2(\check{K}^2 - 1)}{\check{\zeta} - (\check{K}^2 - 1)^2} + 1 \right] = \frac{1}{16i\pi} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} - (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \quad (148)$$

We end up with the non-quadratic dispersion relation

$$\check{\zeta}_Q \equiv (\check{z}_q - 2\check{\Delta}) \check{\Delta} \xrightarrow[\check{\Delta} \rightarrow +\infty]{\check{Q} \text{ fixed}} -C\check{Q}^2 \left\{ 1 + \check{\Delta}^{-1/2} \left[\frac{i\sqrt{2}}{\pi\sqrt{C}}(r - r^*) + \frac{3i/2}{\pi\sqrt{C}}(r + r^*) \right] + O(\check{\Delta}^{-1}) \right\} \quad (149)$$

with the notations $C = \frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4$ and $r = (1 + iC^{1/2}\check{Q})^{1/2}$. At low \check{Q} , we can approximate $r \simeq 1$; we find the first two terms of expansion (86) of the branch quadratic start coefficient, i.e. the dominant order for the real part and for the imaginary part. At large \check{Q} , we can approximate $r \simeq \exp(i\pi/4)C^{1/4}\check{Q}^{1/2} + \exp(-i\pi/4)C^{-1/4}\check{Q}^{-1/2}/2$, which gives rise to contributions \check{Q}^2 , $\check{Q}^{5/2}$ and $\check{Q}^{3/2}$; we then find the low \check{q} limit of expansion (136).³⁷ The connection is perfect, and there is, in the continuum branch of type II near zero chemical potential, no other wavelength scale than $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ and $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$. To be complete, let us expand the residues in the phase and modulus channels, and the relative phase between these two channels leading to the maximum global residue:

$$|\check{Z}_-| \xrightarrow[\check{\Delta} \rightarrow +\infty]{\check{Q} \text{ fixed}} \frac{16\check{Q}}{\check{\Delta}^{1/2}} \left[1 - \frac{\sqrt{2}\check{Q} \operatorname{Re} r}{2\pi\check{\Delta}^{1/2} \sqrt{1 + C\check{Q}^2}} + O(\check{\Delta}^{-1}) \right], \quad |\check{Z}_+| \xrightarrow[\check{\Delta} \rightarrow +\infty]{\check{Q} \text{ fixed}} \frac{8C\check{Q}^3}{\check{\Delta}^{5/2}} \quad \text{and} \quad \theta + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\check{\Delta} \rightarrow +\infty]{\check{Q} \text{ fixed}} -\check{\Delta}^{-1/2} \frac{\operatorname{Re} r}{\pi\sqrt{C}} \quad (150)$$

4.8. Analytical extension for $\mu > 0$ through the windows $\epsilon > \epsilon_2(q)$ and case $\mu < 0$

We briefly examine in this section the continuum collective excitation branch(es) obtained by analytic continuation of the eigenenergy equation through energy intervals other than $[\epsilon_1(q), \epsilon_2(q)]$. Recall that the branch points $\epsilon_i(q)$ of the equation and their domain of existence with wave number q were the subject of section 4.2.1.

4.8.1. On the BCS side: $\mu > 0$

Let's start with the case of a positive chemical potential. For wave numbers $q < q_0$, where q_0 is given by (57), the other possible extension intervals are $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ and $[\epsilon_3(q), +\infty[$. In the procedure (12), it is then necessary to use respectively form III and form IV of the spectral densities $\rho_{s,s'}(\epsilon, \mathbf{q})$, within the meaning of table 2.

The essential difference with the type II form is that the $\rho_{s,s'}(\epsilon, \mathbf{q})$ depend on the real energy ϵ through the first two roots s_1 and s_2 , or the second root s_2 of the cubic equation (71) on s , this equation being parametrically dependent on ϵ . It is now necessary to analytically continue the spectral densities therefore the roots s_i to complex values z of the energy in the fourth quadrant $\operatorname{Re} z > 0$ and $\operatorname{Im} z < 0$ to which our study is limited. Using Cardan formulas, we find that the roots s_i have, as functions of z , branch cuts where the Cardan discriminant is real negative, and a branch point where it vanishes.³⁸ We get rid of the branch cuts by numerically performing a continuous mapping of the three roots

³⁷. Let's replace \check{q} with $\check{\Delta}^{-1/2}\check{Q}$ in (136) and expand to the relative order $\check{\Delta}^{-1/2}$. Term a_0 returns the \check{Q}^2 contribution, term a_1 returns the $\check{Q}^{5/2}$ contribution, and the $\check{q}^{3/2}$ bit of term a_3 returns the $\check{Q}^{3/2}$ contribution. Term a_2 and the $\check{q}^{7/2}$ bit of a_3 contribute to the relative orders $\check{\Delta}^{-1}$ and $\check{\Delta}^{-3/2}$, out of range of (149).

³⁸. This phenomenon is general for a polynomial $P(X, z)$ whose coefficients depend analytically on z . Consider an analytic mapping of a root $s(z)$ along a path in the complex plane. Taking the derivative of the definitional equation $P(s(z), z) = 0$ with respect to z , we find that $ds/dz = -\partial_z P(s, z)/\partial_X P(s, z)$, which remains well defined as long as $\partial_X P(s, z) \neq 0$ therefore as long as $s(z)$ is not a multiple root of $P(X, z)$.

$s_i(z)$ of the cubic equation along a path C connecting z to an origin point ϵ_0 fixed in the analytic continuation interval $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ (for example, its middle) or $[\epsilon_3(q), +\infty[$ (by example $2\epsilon_3(q)$). On the other hand, we cannot eliminate the branch points of $s_i(z)$. Their positions in the complex plane (other than the expected values $\pm 2\Delta$) are given by the roots of the polynomial $P_8(X)$ of degree eight, see (59), which is related to the discriminant of the cubic equation, as we have already pointed out in section 4.2.2. Fortunately, it follows from footnote 21 that $P_8(X)$ has within the fourth quadrant only one complex root α . It remains to be specified on which side of α the continuous mapping of $s_i(z)$ takes place: at fixed starting point ϵ_0 and arrival point z , go to one side α or the other has the effect of exchanging the roots $s_2(z)$ and $s_3(z)$, as we have verified numerically, which changes the spectral densities. In the present study, we have chosen never to go under the point α , that is to say go around above and to the left if $\text{Re } z < \text{Re } \alpha$ and $\text{Im } z < \text{Im } \alpha$; the corresponding branch cut on the $s_i(z)$, and therefore on the analytically continued spectral densities $\rho_{ss'}(z, \mathbf{q})$,³⁹ is the vertical half-line starting from α downwards.

The results of our numerical study are shown in figure 8, for three values of the interaction strength, $\Delta/\mu = 1/10$ in the weak coupling regime, $\Delta/\mu = 1$ in the strong coupling regime and $\Delta/\mu = 5$ close to a zero chemical potential. We find a branch $q \mapsto z_q$ of type III, at least as long as Δ/μ is not too large (it is absent from the fourth quadrant for $\Delta/\mu = 5$), see figures 8a and 8b. Its wavelength domain of existence is an interval $[q_1, q_0]$; the upper bound has the maximum accessible value q_0 , but the lower bound is positive, because the real part of z_q vanishes (and z_q passes virtually in the third quadrant) before q reaches zero. In the weak coupling regime, we can as in section 4.6.2 make $\check{\Delta}$ tend to zero at fixed \check{z} and reduce the eigenenergy equation to $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + \check{M}_{+-\downarrow}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) = 0$ as in (102). For $\check{q} > 2/3$, it follows directly from equation (99) that

$$\check{\rho}_{++}^{(0)[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) + \check{\rho}_{+-}^{(0)[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{\pi\check{z}}{2\check{q}} = \check{\rho}_{++}^{(0)[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) + \check{\rho}_{+-}^{(0)[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) \quad (151)$$

so that the Nozières term takes exactly the same form for the extension intervals $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ and $[\epsilon_2, \epsilon_3]$. For $\check{q} < 2/3$, the extension interval $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ is cut in half by $\check{q}(2 + \check{q})$ but, as we pass above the point α in the continuous mapping of the roots, it is the third column of (99) which counts and relation (151) remains true. Indeed, the bound $\check{q}(2 + \check{q})$ is none other than the limit of α at low $\check{\Delta}$ (see the sentence below (99) and footnote 21). We deduce that the type II and type III branches coincide in the limit $\check{\Delta} \rightarrow 0$ at fixed \check{q} , which numerical calculation confirms masterfully, see figure 8a. On the other hand, we find one or two branches of type IV depending on the case, see figures 8d, 8e, 8f. Their wave number domain is a union of two intervals, according to the vanishing of the real part or the imaginary part of z_q . The upper interval is compact for Δ/μ quite large, but extends to infinity otherwise. Remarkably, the lower interval begins at $q = 0$, where z_q tends to zero; this behavior differs from that of the continuum branch of type II studied in the other sections and rather evokes the acoustic branch.

Let us now show analytically that the collective branches of type IV do not have an acoustic start $z_q \approx q$ but a hyperacoustic start $z_q \approx q^{4/5}$ (the group or phase velocity diverges in $q = 0$) or hypocoacoustic $z_q \approx q^{3/2}$ (the velocity tends to zero). For this, let's build an approximate form of the equation on z_q at low energy and low wave number, first by replacing the matrix elements of M (not yet analytically continued) by their dominant order in q at fixed $\zeta \equiv \check{z}/\check{q}$,⁴⁰

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \simeq \check{M}_{--}(0, 0) \equiv \frac{A}{(2\pi)^3}, \quad \check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \simeq \frac{(B + C\zeta^2)}{(2\pi)^3} \check{q}^2, \quad \check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \simeq \frac{D\zeta\check{q}}{(2\pi)^3} \quad (152)$$

then replacing $\text{sh } \Omega$ by $-i$ in equations (66, 67, 68) useful for analytic continuation (12). We assumed in the second step, by checking it numerically, that $s_2(z)$ is in the fourth quadrant, just like ζ . We thus end up with a much simpler

39. The roots $s_i(z)$ are then inserted in the arguments of the incomplete elliptic functions E and F , see (66) and (67) for example. These elliptical functions have branch cuts described in footnote 20, which can always be moved by continuous deformation, and irremovable branch points. Let us show by the absurd that the arguments of E and F never reach these branch points, during the journey of $s_i(z)$ in the complex plane: if this were the case, we would have $1 + (1 - s^2) \text{sh}^2 \Omega = 0$, with $\text{sh}^2 \Omega = (z^2 - 4\Delta^2)/(4\Delta^2)$ and s solution of the equation deduced from (71) by replacing ϵ by z ; elementary manipulations in (71) thus modified bring down the impossible condition to satisfy $1/\text{sh}^2 \Omega = 0$. To numerically calculate the functions E and F , we return to their integral definition, see §8.111 of [20], and if necessary move the branch cut of the square root in the integrand by continuous mapping. We can alternatively work directly on the functions (66, 67), by writing for example $f_{--}(\frac{\zeta}{2} - \text{asin } s_2) = \int_{s_2}^1 \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} \frac{X^2 \text{sh}^2 \Omega}{[1+(1-X^2)\text{sh}^2 \Omega]^{3/2}}$ thanks to the change of variable $X = \cos \alpha$.

40. We give $A = \int d^3\check{k} \frac{\check{\Delta}^2}{2\check{\epsilon}_k^3}$, $B = \int \frac{d^3\check{k}}{2\check{\epsilon}_k} \left(\frac{\check{\epsilon}_k}{4\check{\epsilon}_k^2} + \frac{\check{\Delta}^2 \check{k}^2}{2\check{\epsilon}_k^3} \right)$, $C = \int d^3\check{k} \frac{(-1)}{8\check{\epsilon}_k^3}$ and $D = \int d^3\check{k} \frac{\check{\epsilon}_k}{-4\check{\epsilon}_k^3}$. There is no linear term in ζ in $\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q})$ because it is an even function of \check{z} . According to relation (A6) of [21], we also have $B = \int d^3\check{k} \frac{\check{k}^2}{6\check{\epsilon}_k^3}$ as in equation (23) of reference [23].

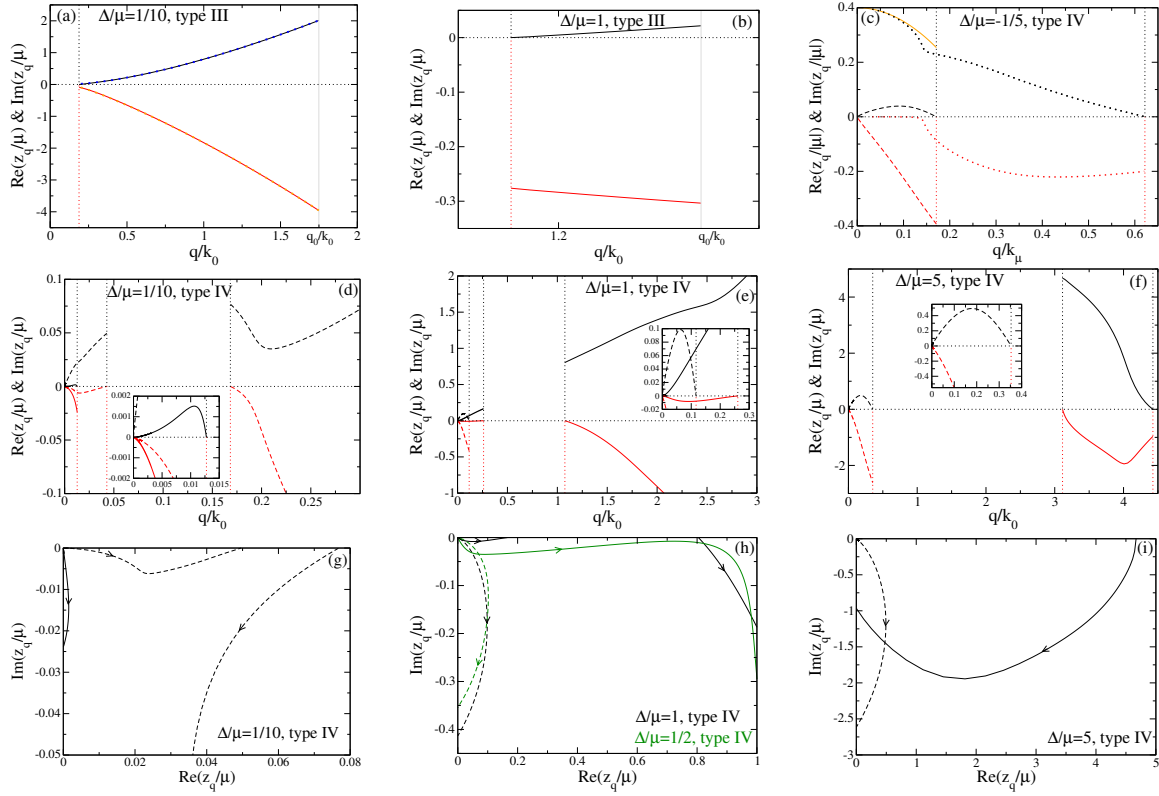


Figure 8: In a gas of fermions with zero range interactions (case of cold atoms), continuum collective branches $q \mapsto z_q$ obtained by carrying out the analytic continuation of the eigenenergy equations through other intervals than the one $[\epsilon_1(q), \epsilon_2(q)]$ of type II used so far. Solid black line or black dashed line: real part; solid red line or red dashed line: imaginary part. The interruptions of the branches, due to exits from the fourth quadrant (the only one explored here) (the real or imaginary part of z_q vanishes) are identified by vertical dotted lines. For $\mu > 0$, numerical results for branches of type III (extension through the interval $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$) in (a) and (b), and of type IV (interval $[\epsilon_3(q), +\infty]$) in (d), (e) and (f). For $\mu < 0$, numerical results for type IV branches in (c) (the interval $[\epsilon_3(q), +\infty]$ is the only possible). Here $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, $k_\mu = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$, $\Delta/\mu = 1/10$ in (a) and (d), $\Delta/\mu = 1$ in (b) and (e), $\Delta/\mu = 5$ in (f) (no type III branch for this value) and $\Delta/\mu = -1/5$ in (c). The interval $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ closes and the type III branch ceases to exist at $q = q_0(\Delta)$ given by (57) and marked with a solid vertical gray line. At weak coupling, in (a), the type III branch almost merges with that previously studied of type II and is very well reproduced by the solution of (102) (large dark blue or orange dots). Insets: enlargements; the values at $\tilde{q} < 0.001$ are taken from (154) after numerical solution of (153) rewritten as an equation on $s_2(z)$. Trajectories of type IV branches in the complex plane for $\Delta/\mu = 1/10$ in (g), $\Delta/\mu = 1$ (black) and $\Delta/\mu = 1/2$ (green) in (h), $\Delta/\mu = 5$ in (i); the arrows indicate the direction of the increasing q . Everywhere for type IV branches: solid line (dotted line), hypoacoustic branch (155) [hyperacoustic (157)] and its possible emanation at large q after excursion outside the fourth quadrant. In (c): the dotted branch is of another nature, see its analytical behavior (158) at low \tilde{q} (solid orange line).

eigenenergy equation,

$$\left[i\pi^2 \check{\Delta} \phi_{--}(s_2) + A\check{q} \right] \left[-i \frac{\pi^2 \zeta^2}{4\check{\Delta}} \phi_{++}(s_2) + (B + C\zeta^2)\check{q} \right] - \left[-\frac{\pi^2}{2} \zeta \phi_{+-}(s_2) + D\zeta\check{q} \right]^2 \approx 0 \quad \text{where} \quad \begin{cases} \phi_{--}(s) = \frac{\ln(1+\sqrt{1-s^2}) - \ln(1-\sqrt{1-s^2})}{2} \\ \phi_{++}(s) = \frac{1}{2} \phi_{--}(s) + \frac{(1-s^2)^{1/2}}{2s^2} \\ \phi_{+-}(s) = \frac{(1-s^2)^{1/2}}{s} \end{cases} \quad (153)$$

To be consistent, we must also approximate equation (71) on $s_2(z)$ as follows,

$$\frac{4}{\zeta^2} (1 - i s_2 \check{\Delta}) \approx \frac{1 - s_2^2}{-s_2^2} \quad (154)$$

which allows us to easily eliminate ζ and consider (153) as an equation on $s_2(z)$.

A first type of solution of (153) corresponds to $\zeta \rightarrow 0$ therefore $s_2 \rightarrow -i/\check{\Delta} + 0^+$. In the limit $\check{q} \rightarrow 0$, we find by trial and error that ζ^2/\check{q} has a finite limit γ ,⁴¹ and that (153) is reduced to an affine equation on γ . Hence the exact hypoacoustic behavior of the branch:

$$\boxed{\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \gamma^{1/2} \check{q}^{3/2} [1 + O(\check{q})] \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{-4i\pi^{-2} B \check{\Delta} \phi_{--}(s)}{(\phi_{++}\phi_{--} - \phi_{+-}^2)(s)} \Big|_{s=-i/\check{\Delta}+0^+}} \quad (155)$$

For z_q to be in the fourth quadrant, γ must have a negative imaginary part, which imposes $\check{\Delta} \in]0, \check{\Delta}_0[$ with $\check{\Delta}_0 \approx 2,138$.⁴² This explains why the hypoacoustic branch does not appear at low \check{q} in figure 8f. Furthermore, we show that, among the Z_{\pm} residues of section 4.3, the one Z_+ in the channel of small phase deviations is dominant, and diverges as $\check{q}^{-1/2}$; at low \check{q} , the hypoacoustic modes are therefore mainly phase modes of the order parameter.

A second type of solution of (153) corresponds to $|\zeta| \rightarrow +\infty$ therefore $s_2 \rightarrow 1 - i0^+$. Then, in (153), we neglect B in front of $C\zeta^2$, we divide the remaining equation by $(\pi^2 \zeta/2)^2$, we expand and collect by powers of \check{q} , then we neglect the \check{q}^2 terms to obtain:

$$(\phi_{--}\phi_{++} - \phi_{+-}^2)(s_2) + \frac{4\check{q}}{\pi^2} \left[D\phi_{+-}(s_2) + iC\check{\Delta}\phi_{--}(s_2) - \frac{iA}{4\check{\Delta}}\phi_{++}(s_2) \right] \approx 0 \quad (156)$$

It remains to replace each contribution by its dominant order in the small parameter $u = (1 - s_2^2)^{1/2}$: in the second term of (156), it suffices to know that $\phi_{--} \sim \phi_{++} \sim \phi_{+-} \sim u$, but in the first, we must expand each function ϕ up to the relative order u^4 (this is the sub-sub-leading order) to obtain the equivalent $u^6/45$. Hence the law $u \sim \check{q}^{1/5} u_0$ and the exact hyperacoustic behavior of the branch:

$$\boxed{\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \beta^{1/2} \check{q}^{4/5} [1 + O(\check{q}^{2/5})] \quad \text{with} \quad \beta = \frac{4(i\check{\Delta} - 1)}{u_0^2} \quad \text{and} \quad u_0 = \left(\frac{180}{\pi^2} \right)^{1/5} \left(\frac{iA}{4\check{\Delta}} - iC\check{\Delta} - D \right)^{1/5}} \quad (157)$$

In (157), we must choose the value of the fifth root so that u_0 is in the first quadrant and β has a negative imaginary part, which can be done for any value of $\check{\Delta} > \check{\Delta}_1 \approx 0.05283$, hence the systematic presence of a type IV hyperacoustic branch at low \check{q} in figure 8.⁴³ We verify that, among the residues Z_{\pm} of section 4.3, the one Z_+ in the channel of small phase deviations is dominant, and diverges as $\check{q}^{-4/5}$; at low \check{q} , the hyperacoustic modes are therefore also mainly phase modes of the order parameter.

It remains to understand physically the type IV branch on the upper wave number interval. We affirm that this connected component is only the continuation at large q , that is to say the result of the irruption in the fourth quadrant, of the hypoacoustic branch or of the hyperacoustic branch. We can clearly see this by mentally extending the curves

41. ζ^2/\check{q} cannot tend to infinity because $\phi_{++}\phi_{--} - \phi_{+-}^2$ does not vanish at $s = -i/\check{\Delta} + 0^+$. Suppose that $\zeta^2/\check{q} = o(1)$ leads to the contradictory result $\zeta^2 \approx \check{q}$.

42. If $\check{\Delta} = \text{sh } \tau$, $\phi_{--} = \tau + i\pi/2$, $\phi_{++} = (\tau - \text{sh } \tau \text{ch } \tau + i\pi/2)/2$ and $\phi_{+-} = i \text{ch } \tau$ in (155). In addition, $\gamma^{1/2} \sim -2i/[3\check{\Delta}(\pi^2/8 - 1)]^{1/2}$ when $\check{\Delta} \rightarrow 0$.

43. The continuation of β to $\check{\Delta} \in]0, \check{\Delta}_1[$ has a positive imaginary part and obeys $\beta^{1/2} \sim (8\pi\check{\Delta}/45)^{1/5}$ when $\check{\Delta} \rightarrow 0$.

in figure 8d, the large q component would be the return of the hyperacoustic branch after a passage in the first quadrant. Similarly, in figure 8e, the large q component seems to be the return of the hypoacoustic branch after a detour in the first quadrant. On the other hand, in figure 8f, we interpret the large q component as the first entry of the hypoacoustic branch in the fourth quadrant, this branch pointing from the start at low q towards the first quadrant, see the discussion below equation (155). To make these interpretations easier to follow, we have shown in figures 8g, 8h and 8i the trajectory of type IV branches for $\mu > 0$ in the complex plane. To justify them numerically, we also show the trajectory of the branches for $\Delta/\mu = 1/2$ in figure 8h: the hypoacoustic branch is a connected set in the fourth quadrant. These figures lead to the following empirical remark: the branches which venture into the third quadrant ($\text{Re } z < 0$ and $\text{Im } z < 0$) never return (at subsequent q) in the fourth quadrant, unlike those that venture into the first quadrant.

4.8.2. On the BEC side: $\mu < 0$

Finally, let's look for a continuum collective branch in the case of a negative chemical potential. As we said in section 4.2.1, the spectral densities then have, on the real energy axis, $\epsilon_3(q)$ of equation (56) as the only point of non-analyticity. The analytic continuation of the eigenenergy equation can only be done through the interval $[\epsilon_3(q), +\infty[$, therefore can only be of type IV. The rescaling of the variables must be revised and the calculation of the spectral densities must be redone. We now express the wave numbers in units of $k_\mu = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$, for example $\check{q} = q/k_\mu$, energies in units of $|\mu|$, for example $\check{\epsilon} = \epsilon/|\mu|$ and $\check{\xi}_k = \check{k}^2 + 1$, the spectral densities and the matrix elements of M in units of $2mk_\mu/\hbar^2$. We find that the reduced spectral densities are always given by form IV of table 2, provided that the term $1 - \check{q}^2/4$ is replaced by $-(1 + \check{q}^2/4)$ in cubic equation (71). For $\check{\epsilon} > \check{\epsilon}_3(\check{q})$, the modified equation has indeed, for all $\check{q} > 0$, three real roots, $s_1(\epsilon) < -1$, $s_2(\epsilon) \in [0, 1]$ which appears in the spectral densities, and $s_3(\epsilon) > 1$, as one can show in a graphical discussion. The analytic continuation of s_2 to complex energies z is done by continuous mapping as in section 4.8.1, never passing below its branch point(s), i.e. complex roots of the polynomial $P_8(X)$ in the fourth quadrant.⁴⁴

We have studied numerically the case $\check{\Delta} = \Delta/|\mu| = 1/5$, see figure 8c. At low \check{q} , we find a hyperacoustic branch whose start is well described by (157) if we think of changing the factor $i\check{\Delta} - 1$ in $i\check{\Delta} + 1$ in β , but which ends up leaving the fourth quadrant; equation (157) thus modified also makes it possible to show that this hyperacoustic branch exists in the vicinity of $q = 0$ for any value of $\check{\Delta}$. We also find a second branch, which does not reach the large \check{q} but tends to the value 2Δ at the origin of the wave numbers by following the real axis closely (its imaginary part tends to zero as q^3). We analytically predict a quadratic start⁴⁵

$$z_q \underset{q \rightarrow 0}{=} 2\Delta - \frac{1}{\check{\Delta} \sin^2 \psi} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + O(q^3) \quad \text{with} \quad \frac{\psi(\psi + \sin \psi \cos \psi)}{2 \sin^2 \psi} = \left[1 - 8\pi \check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)\right]^2 \quad (158)$$

shown as a solid orange line in figure 8c and in good agreement with the numerical results; the transcendental equation on $\psi = \pi/2 - \text{asin } s_2$ has a unique solution in the interval $[0, \pi]$. Result (158) is in fact only valid for $\psi < \pi/2$, that is to say $\check{\Delta} < 0.222$; for $\check{\Delta} > 0.222$, the branch leaves the fourth quadrant towards the first quadrant (its imaginary part vanishes) before reaching $\check{q} = 0$.⁴⁶ The quadratic start (158) is reminiscent of that (82) of the usual continuum

44. For $\mu < 0$, you must replace \check{q} by $i\check{q}$ in the definition (59) of $P_8(X)$. Then $P_8(X)$ has for $\check{q} < \check{q}_*(\check{\Delta})$ a single root α strictly inside the fourth quadrant, and has two, α and α' , otherwise. Here, $\check{q}_*(\check{\Delta})$ is the real positive root of the Cardan discriminant δ of footnote 21 considered as a polynomial in \check{q} and also subject to the substitution $\check{q} \rightarrow i\check{q}$.

45. If we have that $z_q - 2\Delta \approx q^2$, we see that $\text{sh } \Omega \approx q \rightarrow 0$ and $\text{ch } \Omega \rightarrow 1$ in (66, 67, 68) so that $f_{--}(\psi) \sim \frac{\text{sh}^2 \Omega}{2}(\psi + \sin \psi \cos \psi)$, $f_{++}(\psi) \sim \psi$, $f_{+-}(\psi) \sim \text{sh } \Omega \sin \psi$. In addition, the lower edge of the broken pair continuum is $2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2} > 2\Delta$ for $\mu < 0$ and $q = 0$; therefore, $M_{++}(z_q, q)$ and $M_{+-}(z_q, q)$ have a finite limit $M_{++}(2\Delta, 0)$ and $M_{+-}(2\Delta, 0)$ when $q \rightarrow 0$, while $M_{--}(z_q, q) = O(q^2)$ since $M_{--}(2\Delta, 0) = 0$ as in (53) and $M_{--}(z, q)$ varies quadratically in q and linearly in $z - 2\Delta$ around $(z, q) = (2\Delta, 0)$. Given the analytic continuation procedure (12) and the factor $1/q$ in the spectral density, see table 2, the contribution of M_{++} and M_{--} is negligible in the analytically continued matrix element while that of M_{+-} is not. Finally, by taking the limit $q \rightarrow 0$ in equation (71) modified for $\mu < 0$, knowing that z_q is in the fourth quadrant and that $\sin \psi = [1 - s_2^2(z_q)]^{1/2}$, we find that $\text{sh } \Omega \sim -i\check{q}/(\check{\Delta} \sin \psi)$ and we end up with (158). Expression (85) of $\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)$ and its sign still apply if we set $\tau = \text{argsh}(\mu/\Delta) < 0$ and if we replace the now purely imaginary factor $-(e^{2\tau} - 1)^{1/2}$ by $(1 - e^{2\tau})^{1/2}$.

46. In the limit $\check{q} \rightarrow 0$, the root $s_2(z)$ obtained by continuous mapping is positive for $\check{z} = 2\check{\Delta} + (C - i0^+)\check{q}^2/\check{\Delta}$ as soon as the real coefficient C is < -1 , as it is the case in (158). Using (71) modified for $\mu < 0$, we find that $s_2^2(z) \rightarrow (1 + C - i0^+)/(C - i0^+)$ therefore $s_2(z) \rightarrow [(1 + C - i0^+)/(C - i0^+)]^{1/2}$ since s_2 must be close to 1 when $C \gg 1$. Now we have $s_2 = \cos \psi$. The condition $s_2 > 0$ therefore imposes $\psi < \pi/2$. In addition, we have

branch; the reasoning that led to (92) here also gives zero limit residues in $q = 0$, $\check{Z}_- \approx \check{q}$ and $\check{Z}_+ \approx \check{q}^3$. However, there is no hypocoacoustic branch. Moreover, the reasoning leading to (155) is not transposed to the case $\mu < 0$: for $z = o(\check{q})$, we find numerically that $s_2(z) = o(1)$, and that the root $s_3(z)$ has the expected limit $i/\check{\Delta}$, in the continuous mapping passing above the α branch point.

5. Conclusion

In a spatially homogeneous three-dimensional unpolarized gas of spin 1/2 fermions with attractive interaction, prepared in the thermodynamic limit at zero temperature, therefore fully paired and condensed in the form of $\uparrow\downarrow$ bound pairs, we have analytically studied the continuum branch corresponding to the collective pair-breaking excitation modes of the gas. As shown in reference [3], under certain conditions, such modes can manifest themselves experimentally by a Lorentzian peak $\omega \mapsto |Z_{\mathbf{q}}/(\hbar\omega - z_{\mathbf{q}})|^2$ in the intensity of a frequency response function on the collective variable of the perturbed gas given by the complex order parameter $\Delta(\mathbf{r}, t)$. We thus analyzed the complex energy $z_{\mathbf{q}}$ of the mode as well as its residue $Z_{\mathbf{q}}$ for an arbitrary very weak non-polarizing and bounded in time excitation, according to wave vector \mathbf{q} , in order to obtain a complete description of the branch. Mathematically, we use time-dependent BCS theory linearized around the minimal energy stationary solution, to obtain an equation on the eigenenergies of the modes, which one must always analytically continue to the lower complex half-plane across the branch cut resulting from the broken pair continuum at fixed \mathbf{q} , if we want to find $z_{\mathbf{q}}$. Physically, the fact that $\text{Im } z_{\mathbf{q}}$ is negative reflects the damping of the mode by breaking of pairs and emission of free fermions of wave vectors $\mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$ in the continuum, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Our work analytically studies the branch at any wave number q , and for any interaction strength; it therefore goes significantly beyond previous work, which obtains analytical results only in the limit of low wave numbers $q \rightarrow 0$, that is to say only on the quadratic start of the branch $z_{\mathbf{q}} - 2|\Delta| \propto q^2$, within the weak coupling limit $|\Delta|/\mu \rightarrow 0^+$ [2] or for an arbitrary coupling $|\Delta|/\mu$ but a positive chemical potential μ [3].

In the weak coupling limit $|\Delta|/\mu \rightarrow 0^+$, the real part of the dispersion relation exhibits three scales of variation with wave numbers. (i) The first one $q_1 = k_0|\Delta|/\mu$, where k_0 is the wave number minimizing the energy $\epsilon_{\mathbf{k}}$ of a BCS quasiparticle ($\epsilon_{k_0} = |\Delta|$), unsurprisingly corresponds to $q \approx 1/\xi$ where ξ is the size of a $\uparrow\downarrow$ bound pair. The branch has a universal limiting law when $z_{\mathbf{q}}$ is expressed in units of $|\Delta|$ and when $|\Delta|/\mu$ tends to zero at fixed q/q_1 : this law applies as well for fermions with attractive contact interaction in the s wave (case of cold atoms) as for charged fermions with a long-range repulsive Coulomb interaction (case of a BCS superconductor in the sense of reference [2] that is to say without real inclusion of the phonons of the crystal lattice). If we start from $q = 0^+$, the real part increases, exhibits a maximum $\approx 2.16|\Delta|$ at $q/q_1 \approx 1.70$, then decreases and tends to zero as $|\Delta|q_1/q$, up to a logarithmic factor in q/q_1 ; the imaginary part is decreasing and diverges linearly as $-\mu q/k_0$ up to logarithmic corrections in q/q_1 . At the dominant order, the residue is carried by the channel of small modulus deviations of the order parameter from its equilibrium value. The continuum mode is a modulus mode and one can neglect the phase-modulus coupling in the linearized BCS equations. (ii) The second wave number scale is $q_2 = k_0(|\Delta|/\mu)^{2/3}$: on the real part of the branch, the decrease $1/q$ of the previous scale is gradually interrupted, $\text{Re } z_{\mathbf{q}}$ goes through a minimum of the order of $\mu(|\Delta|/\mu)^{4/3}$ and located at $q_{\min} \approx q_2$, up to logarithmic factors in $|\Delta|/\mu$, then goes up; this is due to the contribution of the phase-modulus coupling. The imaginary part continues to decrease in the same approximately linear way in q . Even if the residue in the modulus channel still prevails, that in the phase channel is no longer negligible. The continuum mode is in phase-modulus hybridization. (iii) The third scale is $q_3 = k_0$; the imaginary part of $z_{\mathbf{q}}$ is approximately proportional to $-\mu q/k_0$, with a logarithmic coefficient in $|\Delta|/\mu$, while the real part is increasing, approximately proportional to $\mu(q/k_0)^{3/2}$, again with a logarithmic coefficient in $|\Delta|/\mu$; the residues in the phase and modulus channels are almost equal: the mode lives with almost equal amplitudes in the two channels. At $q = 2k_0$, the interval between branch points of the eigenenergy equation, through which the analytic continuation was carried out, closes and the branch ceases to exist. The results at the scales q_2 and q_3 are valid for a short-range interaction, as in the cold atom gases, to which we limit ourselves hereinafter; we do not know if they survive at least qualitatively the Coulomb interaction.

analytically calculated the coefficient of the term q^3 in expansion (158). We find that it is pure imaginary, that its imaginary part is < 0 for $\psi < \pi/2$ and vanishes by changing sign at $\psi = \pi/2$. It is also at this threshold value $\psi = \pi/2$ ($\check{\Delta} \approx 0.222$) that \check{z}_q merges to second order in \check{q} with the real root $\check{z}_2(\check{q})$ of the polynomial $P_8(X)$ of (59) transposed to the case $\mu < 0$, so with a point of non-analyticity of two of the roots $s_i(\check{z})$: for $\mu < 0$, it is indeed necessary to replace \check{q} by $i\check{q}$ in (59), and therefore in (62), as footnote 44 says.

In the right vicinity of the zero chemical potential, $\mu/|\Delta| \rightarrow 0^+$, which is in the strong interaction regime, on the positive scattering length side of the BEC-BCS crossover, the continuum collective branch z_q is, to leading order in $\mu/|\Delta|$, purely real and quadratic in q , $z_q - 2|\Delta| \simeq -128[\Gamma(5/4)]^4 \pi^{-5} \hbar^2 q^2 / 2m$, over its entire domain of existence $]0, 2k_0[$, domain which becomes more and more narrow since here $k_0 = (2m\mu)^{1/2} / \hbar$, where m is the mass of a fermion, tends to zero. At the next order appears a nonzero imaginary part of z_q , which reveals the existence of two wave number scales. The first scale, $Q_1 = k_0(\mu/|\Delta|)^{1/2}$, corresponds to the limit of validity of the quadratic approximation on z_q (this requires $q \ll Q_1$, which reference [3] did not say) but has not yet received any other physical interpretation. At this scale, the imaginary part is of order of magnitude $\mu(\mu/|\Delta|)^{3/2}$, and goes monotonously from a quadratic start to an asymptotic semiquintic plunge in q . The second scale is $Q_2 = k_0$: at the dominant order, the imaginary part of z_q is of the order of $\mu(\mu/|\Delta|)^{1/4}$, is decreasing, and varies with the same power law $q^{5/2}$ as in the asymptotic part $q \gg Q_1$ of the previous scale. On both scales, the dominant residue is carried by small modulus deviations of the order parameter from its equilibrium value: the continuum mode remains from this point of view a modulus mode, even if it is absolutely necessary to include phase-modulus coupling in the calculation of its energy to have the right result, unlike what happens in the weak coupling limit at $q = O(q_1)$.

The previous results, obtained for $\mu > 0$ and $q < 2k_0$, result from an analytic continuation of the eigenenergy equation across the branch cut joining its first two branch points $\epsilon_a(q)$ and $\epsilon_b(q)$ on the positive real energy half-axis. They always correspond to a continuum collective branch of limit $2|\Delta|$ and of quadratic start at $q = 0$. For a not too large wave number ($q < q_0(\Delta, \mu) \in]2k_0/\sqrt{3}, 2k_0[$), there is a third branch point $\epsilon_c(q)$. The analytic continuation through the interval $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ gives rise to a new branch of excitation in the lower right quadrant of the complex plane, at least for $|\Delta|/\mu$ not too large and q not too small; at weak coupling, it almost coincides with the continuum collective branch studied previously.

Finally, it remains to perform the analytic continuation across the non-compact interval $[\epsilon_{\max}(q), +\infty[$ where $\epsilon_{\max}(q)$ is the largest branch point on the real axis. For $\mu > 0$ and $q < 2k_0$, we have $\epsilon_{\max}(q) = \epsilon_c(q)$ or $\epsilon_b(q)$ depending on whether q is lower or greater than $q_0(\Delta, \mu)$, as shown in the previous paragraph. For $\mu > 0$ at any $q > 2k_0$, or for $\mu < 0$ at any $q > 0$, the eigenenergy equation has only one branch point with real positive energy, it is the lower edge $2\epsilon_{k=q/2}$ of the broken pair continuum, with which $\epsilon_{\max}(q)$ therefore coincides. Analytically continuing through $[\epsilon_{\max}(q), +\infty[$, we find two new branches. Their wave number domain generally has several connected components, the borders of which mark their entry or exit points in the lower right quadrant of the complex plane. For $\mu > 0$, when these branches reach $q = 0$, they acquire hypoacoustic behavior at low wave numbers (the complex energy $z_q \approx q^{3/2}$ tends to zero faster than linearly and the phase velocity tends to zero) or on the contrary hyperacoustic (the energy $z_q \approx q^{4/5}$ tends to zero more slowly than linearly and the phase velocity diverges), the dominant residue being always carried by the small phase deviations of the order parameter from its equilibrium value. For $\mu < 0$, we observe a hyperacoustic branch; on the other hand, the hypoacoustic branch is replaced by another branch, of limit $2|\Delta|$ (as reference [30] hoped, this is twice the order parameter and not twice the binding energy of a pair $2(|\Delta|^2 + \mu^2)^{1/2}$) and of a purely real quadratic start at $q = 0$ for $|\Delta|/|\mu| < 0.222$, and which then resembles the usual continuum branch, except that it is on the bosonic side of the BEC-BCS crossover.

Finally, let us indicate some possible extensions of this work. BCS theory that we used is no longer quantitative in the strong interaction regime, in particular at the unitary limit often used in cold atom experiments; in this case it would be good to use a more elaborate approach, like that of reference [31]. Our calculation of the continuum mode dispersion relation does not take into account coupling to the Bogolioubov-Anderson acoustic branch (in neutral particle gases), which has *a priori* no reason to be negligible at any wave number and any interaction strength. Finally, one could ask what is the contribution of the continuum collective branch to the thermodynamic quantities of the fermion gas at low temperature, that is to say for $k_B T$ small compared to the binding energy of a pair.

Acknowledgments

We are indebted to Serghei Klimin, Jacques Tempere, Alice Sinatra, Felix Werner, Ludovic Pricoupenko and Pascal Naidon for useful discussions and suggestions on the continuum collective branch. We thank Serghei Klimin for his comments on the text of the article.

Appendix A. On the analytical computation of the spectral densities

Appendix A.1. In the weak coupling limit

Let us show how to pass from expression (29) of the spectral density $\rho_{--}^{(0)}$ to expression (30), integrating on the reduced wave number \bar{K} with fixed value u of the cosine of the polar angle. You just have to find the zeros of the argument of Dirac's δ distribution in the integrand. To simplify, we can immediately impose $\bar{\epsilon} \equiv \epsilon/\Delta \geq 2$ (the spectral density is zero otherwise) and restrict to the integration domain $u \geq 0$ and $\bar{K} \geq 0$ due to integrand even parity. We set $a = \bar{q}u \geq 0$ so that $x_{\pm} = \bar{K} \pm a/2$ and $e_{\pm} = [1 + (\bar{K} \pm a/2)^2]^{1/2}$ in (16). We must solve the equation $\bar{\epsilon} = e_+ + e_-$ on the variable \bar{K} . By cleverly squaring and collecting terms to make the square root disappear, it comes:

$$\bar{\epsilon} = e_+ + e_- \Leftrightarrow \bar{\epsilon}^2 = e_+^2 + e_-^2 + 2e_+e_- \Leftrightarrow 2e_+e_- = \bar{\epsilon}^2 - (e_+^2 + e_-^2) \Leftrightarrow (2e_+e_-)^2 - (e_+^2 + e_-^2 - \bar{\epsilon}^2)^2 = 0 \text{ and } \bar{\epsilon}^2 \geq e_+^2 + e_-^2 \quad (\text{A.1})$$

Let's introduce $\bar{R} = [\bar{\epsilon}^2 - (4 + a^2)]/(\bar{\epsilon}^2 - a^2)$ and make each term of (A.1) explicit, to get the root \bar{K}_0 and its condition of existence:

$$\bar{\epsilon} = e_+ + e_- \Leftrightarrow \bar{K}^2 = \frac{\bar{\epsilon}^2}{4}\bar{R} \text{ and } \frac{(\bar{\epsilon}^2 - a^2)^2 + 4a^2}{2(\bar{\epsilon}^2 - a^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{K} = \bar{K}_0 \equiv \frac{\bar{\epsilon}}{2}\bar{R}^{1/2} \text{ and } \bar{\epsilon} \geq (4 + a^2)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Indeed, the first inequality imposes $\bar{\epsilon}^2 - a^2 \geq 0$ (the fraction it contains has a numerator ≥ 0), and you have to have $\bar{R} \geq 0$. With the same effort, we obtain the value of $e_+ - e_-$ at $\bar{K} = \bar{K}_0$ by a clever rewriting, and therefore the values of e_{\pm} and of x_{\pm} :

$$e_+ - e_- = \frac{e_+^2 - e_-^2}{e_+ + e_-} = \frac{2a\bar{K}_0}{\bar{\epsilon}} = a\bar{R}^{1/2} \implies e_+ = \frac{\bar{\epsilon} + a\bar{R}^{1/2}}{2}, \quad e_- = \frac{\bar{\epsilon} - a\bar{R}^{1/2}}{2}, \quad x_+ = \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}^{1/2} + a}{2}, \quad x_- = \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}^{1/2} - a}{2} \quad (\text{A.3})$$

The resulting identity below makes it possible to integrate (29) on wave number to obtain (30):

$$\delta(e_+ + e_- - \bar{\epsilon}) = J^{-1}\Theta(\bar{\epsilon} - (4 + a^2)^{1/2})\delta(\bar{K} - \bar{K}_0) \quad \text{with} \quad J = \frac{d}{d\bar{K}}(e_+ + e_-) = \frac{x_+}{e_+} + \frac{x_-}{e_-} \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

Appendix A.2. In the general case

In the continuous limit of the lattice model, we show how to express the spectral densities $\rho_{s's'}(\epsilon, \mathbf{q})$, $s, s' \in \{-, +\}$, in terms of elliptical integrals as in table 2, starting from their definition (13) and limiting ourselves to the case $\mu > 0$ and $\epsilon > 2\Delta$. First, we rescale as in (58, 64) then we integrate (13) in spherical coordinates of polar axis the direction of \mathbf{q} . The integration on the azimuthal angle is straightforward, since the integrand does not depend on it. We then integrate on u , cosine of the polar angle, after having reduced to $u \geq 0$ due to even parity of the integrand. It is necessary for that to find the zeros of the argument of the Dirac δ distribution in (13), therefore to solve the equation $\check{\epsilon} = \check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_-$ on u , with $\check{\epsilon}_{\pm} = \check{\epsilon}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$ (similarly we use the notation $\check{\xi}_{\pm} = \check{\xi}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$). Let $a \equiv \check{k}^2 + \frac{1}{4}\check{q}^2 - 1$ and $b \equiv \check{k}\check{q}$, so

$$\check{\xi}_{\pm} = a \pm bu \quad \text{and} \quad \check{\epsilon}_{\pm} = [(a \pm bu)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

It is a clever reparameterization, in the sense that $a = 0$ at the place of the minimum of $k \mapsto \min_u \epsilon_+ + \epsilon_-$ (this function was introduced in [3] to determine the extreme values of k accessible for fixed $\epsilon_+ + \epsilon_-$). Let's take advantage of some of the work done in the weak interaction limit (section Appendix A.1) by directly using the two ends of the chain (A.1):

$$\check{\epsilon} = \check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_- \Leftrightarrow u^2 = \frac{\check{\epsilon}^2}{4b^2}\check{R} \text{ and } \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4a^2)^2 + 16a^2\check{\Delta}^2}{\check{\epsilon}^2 - 4a^2} \geq 0 \Leftrightarrow u = u_0 \equiv \frac{\check{\epsilon}}{2b}\check{R}^{1/2} \text{ and } -\frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \leq a \leq \frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

now with $\check{R} = [\check{\epsilon}^2 - 4(a^2 + \check{\Delta}^2)]/(\check{\epsilon}^2 - 4a^2)$, then by proceeding as in (A.3) to calculate $\check{\epsilon}_+ - \check{\epsilon}_-$ at $u = u_0$:

$$\check{\epsilon}_+ - \check{\epsilon}_- = \frac{\check{\epsilon}_+^2 - \check{\epsilon}_-^2}{\check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_-} = \frac{4abu_0}{\check{\epsilon}} = 2a\check{R}^{1/2} \implies \check{\epsilon}_+ = \frac{\check{\epsilon}}{2} + a\check{R}^{1/2}, \quad \check{\epsilon}_- = \frac{\check{\epsilon}}{2} - a\check{R}^{1/2}, \quad \check{\xi}_+ = a + \frac{\check{\epsilon}}{2}\check{R}^{1/2}, \quad \check{\xi}_- = a - \frac{\check{\epsilon}}{2}\check{R}^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

We thus obtain the Dirac δ expression adapted to polar integration:

$$\delta(\check{\epsilon} - \check{\epsilon}_+ - \check{\epsilon}_-) = \frac{\Theta(1 - u_0)}{J} \delta(u - u_0) \quad \text{with} \quad J = \frac{d}{du}(\check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_-) = b \left(\frac{\check{\xi}_+}{\check{\epsilon}_+} - \frac{\check{\xi}_-}{\check{\epsilon}_-} \right) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

As we have taken into account in (A.8) the geometric constraint $u_0 \leq 1$ by means of a Heaviside function Θ , we can integrate on $u \in [0, +\infty[$. It remains to integrate on the radial variable \check{k} , which, due to function Θ , is not that simple, the domain of integration splitting into various sub-intervals according to the number of roots of the equation $u_0(\check{k}) = 1$. Let's explain how to do this using the example of $\check{\rho}_{+-}$. First, we use a rather than \check{k} as the integration variable. Then, taking into account the range of variation of a in (A.6) and the hyperbolic parametrization (65) of the energy $\check{\epsilon}$ by Ω , we put $a = \frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \sin \theta = \check{\Delta} \text{sh } \Omega \sin \theta$ where $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Then, using (10),

$$\check{\rho}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q}) = \int_{-\frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}^{\frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} da \frac{4\pi\check{\epsilon}\check{\Delta}^2 a \Theta(1 - u_0)/\check{q}}{(\check{\epsilon}^2 - 4a^2)^{3/2}(\check{\epsilon}^2 - 4(a^2 + \check{\Delta}^2))^{1/2}} = \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \text{sh } \Omega \text{ch } \Omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\Theta(1 - u_0) \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (\text{A.9})$$

To know the sign of the argument of Θ according to the value of $s \equiv \sin \theta$, we must by continuity find its zeros therefore solve the cubic equation $u_0^2 = 1$ on s , that is to say (71) except for a trivial rearrangement. The graphic discussion of (71) is done in figure 3c and in section 4.2.2, let us recall the conclusions here: (i) if $\check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q})$, the equation has only one real root s_3 , which is > 1 , so that $u_0(s) < 1$ for all $s \in [-1, 1]$; (ii) if $\check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q})$ (this can happen only if $\check{q} < \check{q}_0$), the equation has three real roots, the first two s_1 and s_2 in $] -1, 1[$, the third $s_3 > 1$, so that $u_0(s) < 1$ on $[-1, s_1[\cup]s_2, 1]$; (iii) if $\check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon}$, the equation has three real roots, $s_1 < -1$, $s_2 \in] -1, 1[$ and $s_3 > 1$, so that $u_0(s) < 1$ on $]s_2, 1]$. The critical energies $\check{\epsilon}_{2,3}(\check{q})$ and the critical wave number \check{q}_0 are defined in section 4.2.1. The integral in the right-hand side of (A.9) is therefore written

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\Theta(1 - u_0) \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} = \begin{cases} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{if } 2\check{\Delta} < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q}) \\ \left(\int_{-\pi/2}^{\text{asin } s_1} + \int_{\text{asin } s_2}^{\pi/2} \right) \frac{d\theta \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{if } \check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q}) \\ \int_{\text{asin } s_2}^{\pi/2} \frac{d\theta \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{if } \check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

The integral of the case (i) in (A.10) is zero due to odd parity of the integrand. In the other cases, it remains to make the change of variable $\theta = \alpha - \pi/2$ in the integral of lower bound $-\pi/2$ and $\theta = \pi/2 - \alpha$ in the integral of upper bound $\pi/2$; one thus gets the function $f_{+-}(\psi)$ of (68), expressible analytically in a simple way. For the spectral densities $\check{\rho}_{++}$ and $\check{\rho}_{--}$, we do the same, except that we have to recognize elliptical integrals, that are complete in the case (i) and incomplete as in (66, 67) otherwise. We find table 2.

Appendix B. On the limit $\Delta/\mu \rightarrow +\infty$

Appendix B.1. At the wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

This is to explain how the following expansions were calculated, useful for obtaining result (136) on the continuum branch of type II (here, \check{q} and $\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta}$ are fixed, with $\text{Im } \check{Z} < 0$):

$$\begin{aligned} \check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) & \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \check{\Delta}^{3/4} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}^2}{\check{Z} - \check{K}^4} + \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2}}{\check{K}^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}} \right) + \check{\Delta}^{1/4} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2} (5\check{q}^2 - 12) \check{K}^4}{6(\check{Z} - \check{K}^4)^2} + O(\check{\Delta}^{-1/4}) \\ & = -\frac{(-\check{Z})^{-1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{3/4} + \frac{[\Gamma(3/4)]^2}{4\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} + \frac{(5\check{q}^2 - 12)}{192\pi\sqrt{2}(-\check{Z})^{3/4}} \check{\Delta}^{1/4} + O(\check{\Delta}^{-1/4}) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{(-\check{Z})^{3/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-1/4} + \frac{3[\Gamma(3/4)]^2 \check{Z} + 4[\Gamma(5/4)]^2 \check{q}^2}{12\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{-1/2} + \frac{(12 - 13\check{q}^2)(-\check{Z})^{1/4}}{192\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-3/4} + O(\check{\Delta}^{-5/4}) \quad (\text{B.2})$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixed}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} + \frac{(-\check{Z})^{1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{1/4} + \frac{(3\check{q}^2 - 4)(-\check{Z})^{-1/4}}{64\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-1/4} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad (\text{B.3})$$

For that, let's start from integral expressions (8) of the matrix elements, let us rescale them and formally integrate on the polar and azimuthal angles of axis the direction of \mathbf{q} . Integrals remain on the relative wave number \check{k} of certain functions $f(\check{k}, \check{\Delta})$. Let's apply the multi-scale analysis explained in the text above (136), which amounts to splitting the integration domain into three sub-intervals:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) &= \int_0^{\eta\check{\Delta}^{3/8}} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{\eta\check{\Delta}^{3/8}}^{A\check{\Delta}^{3/8}} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{A\check{\Delta}^{3/8}}^{+\infty} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) \\ &= \int_0^{\eta/\varepsilon} d\check{K}_b \underbrace{\check{\Delta}^{1/4} f(\check{\Delta}^{1/4} \check{K}_b, \check{\Delta})}_{\equiv f_b(\check{K}_b, \varepsilon)} + \int_{\eta}^A d\check{K}_{bc} \underbrace{\check{\Delta}^{3/8} f(\check{\Delta}^{3/8} \check{K}_{bc}, \check{\Delta})}_{\equiv f_{bc}(\check{K}_{bc}, \varepsilon)} + \int_{A\varepsilon}^{+\infty} d\check{K}_c \underbrace{\check{\Delta}^{1/2} f(\check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c, \check{\Delta})}_{\equiv f_c(\check{K}_c, \varepsilon)} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

where the small parameter is $\varepsilon = \check{\Delta}^{-1/8}$. The cut-off parameters η and A are arbitrary; at the end of Taylor's expansion in ε , it will be necessary to take the limits $A \rightarrow +\infty$ and $\eta \rightarrow 0$ in the coefficient of each power ε^n .⁴⁷ It remains to expand the functions f_b , f_c and f_{bc} in powers of ε at fixed \check{K}_b , \check{K}_c and \check{K}_{bc} , with coefficients $f_b^{(n)}$, $f_c^{(n)}$ and $f_{bc}^{(n)}$, then integrate. If the integral of a $f_b^{(n)}$ is UV divergent or the integral of a $f_c^{(n)}$ is IR divergent when $\varepsilon \rightarrow 0$, you have to take out a simple equivalent of the integrand (typically, a sum of power laws in the integration variable) which will leave behind a convergent integral. We then reexpand everything in powers of ε .

Let us give the example of the matrix element \check{M}_{++} , to be determined with a relative error $O(\varepsilon^8)$ therefore an absolute error $O(\varepsilon^2)$. Let's start with scale (c). Taylor's expansion of the integrand is written

$$f_c(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2}\varepsilon^{-4}}{\check{K}^2 \sqrt{1 + \check{K}^4}} + f_c^{(4)}(\check{K}) \varepsilon^4 + f_c^{(12)}(\check{K}) \varepsilon^{12} + O(\varepsilon^{20}) \quad (\text{B.5})$$

The integral of the first term is IR divergent when $\varepsilon \rightarrow 0$; we go through a succession of elementary manipulations to reduce it to a sum of power laws:

$$\begin{aligned} \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2 \sqrt{1 + \check{K}^4}} &= \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}} - 1 \right) + \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}} - 1 \right) - \int_0^{A\varepsilon} d\check{K} \left[-\frac{1}{2} \check{K}^2 + O(\check{K}^6) \right] + \frac{\varepsilon^{-1}}{A} \\ &= -\frac{[\Gamma(3/4)]^2}{\pi^{1/2}} + \frac{A^3}{6} \varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^{-1}}{A} + O(\varepsilon^7) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

The integral of the second and third terms of (B.5) is UV convergent but is IR divergent; the same manipulations are necessary. However, it suffices to know that

$$f_c^{(4)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2}\check{Z}}{\check{K}^6} + \frac{(2\pi)^{-2}(5\check{q}^2 - 12)}{6\check{K}^4} - \frac{(2\pi)^{-2}\check{Z}}{2\check{K}^2} + O(1) \quad \text{and} \quad f_c^{(12)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow 0}{=} O(1/\check{K}^{10}) \quad (\text{B.7})$$

At the order of the calculation, the two most divergent terms of $f_c^{(4)}(\check{K})$ contribute, and $f_c^{(12)}(\check{K})$ is negligible. The same procedure is to be repeated for scales (bc) and (b). It suffices here to know that

$$f_{bc}(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2}}{\check{K}^2} \varepsilon^{-5} + (2\pi)^{-2} \left(-\frac{\check{Z}}{\check{K}^6} + \frac{1}{2} \check{K}^2 \right) \varepsilon^{-1} + \frac{(2\pi)^{-2}(5\check{q}^2 - 12)}{6\check{K}^4} \varepsilon + O(\varepsilon^3) \quad (\text{B.8})$$

$$f_b(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{(2\pi)^{-2}\check{K}^2}{\check{Z} - \check{K}^4} \varepsilon^{-6} + \frac{(2\pi)^{-2}(5\check{q}^2 - 12)\check{K}^4}{6(\check{Z} - \check{K}^4)^2} \varepsilon^{-2} + f_b^{(2)}(\check{K}) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6) \quad \text{where} \quad f_b^{(2)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow +\infty}{=} (2\pi)^{-2} \frac{\check{K}^2}{2} + O(\check{K}^{-2}) \quad (\text{B.9})$$

We thus end up with the middle part of (B.1), the elements of which the reader will recognize above.

⁴⁷ Taking the limit is actually only necessary for $\check{M}_{...}$. For \check{M}_{++} and \check{M}_{+-} , the dependence on A and η disappears by itself in the coefficients of ε^n useful here; we could therefore take $\eta = A = 1$ which would amount to keeping the scales (b) and (c) fully but introducing the scale (bc) only as a cut-off.

Appendix B.2. At the wave number scale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$

To establish equation (148) on the phase-modulus coupling M_{+-} , we proceed as it is explained in the text above it. After formal angular average of (8) in spherical coordinates of polar axis the direction of \mathbf{q} , M_{+-} is written as an integral on the wave number \check{k} of a certain function $F(\check{k}, \check{\Delta})$. Let us take as small parameter $\varepsilon = \check{\Delta}^{-1/8}$, let us split the integration domain in two around the cut-off $\Lambda \check{\Delta}^{1/4}$ (Λ is a constant) and make the changes of variable (130) of type (a) and (c):

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) = \int_0^{\Lambda \check{\Delta}^{1/4}} d\check{k} F(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{\Lambda \check{\Delta}^{1/4}}^{+\infty} d\check{k} F(\check{k}, \check{\Delta}) = \int_0^{\Lambda \varepsilon^{-2}} d\check{K}_a \underbrace{F(\check{K}_a, \check{\Delta})}_{\equiv F_a(\check{K}_a, \varepsilon)} + \int_{\Lambda \varepsilon^2}^{+\infty} d\check{K}_c \underbrace{\check{\Delta}^{1/2} F(\check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c, \check{\Delta})}_{\equiv F_c(\check{K}_c, \varepsilon)} \quad (\text{B.10})$$

It remains to expand in powers of ε under the integral sign at fixed \check{K}_a or \check{K}_c , with $\check{Q} = \check{\Delta}^{1/2} \check{q}$ and $\check{\zeta}$ defined by (142) fixed,

$$F_a(\check{K}_a, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_a^2 (\check{K}_a^2 - 1)}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} + O\left(\frac{\varepsilon^8}{1 + \check{K}_a^2}\right) \quad \text{and} \quad F_c(\check{K}_c, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{-(2\pi)^{-2} \varepsilon^{-4}}{(1 + \check{K}_c^2)^{1/2}} + O\left(\frac{\varepsilon^4}{\check{K}_c^2}\right) \quad (\text{B.11})$$

then to integrate:

$$\int_0^{\Lambda \varepsilon^{-2}} d\check{K}_a F_a^{(0)}(\check{K}_a) = F_a^{(0)}(+\infty) \Lambda \varepsilon^{-2} + \int_0^{+\infty} d\check{K}_a [F_a^{(0)}(\check{K}_a) - F_a^{(0)}(+\infty)] + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{\Lambda \varepsilon^2}^{+\infty} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) = \int_0^{+\infty} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) - \int_0^{\Lambda \varepsilon^2} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} - \Lambda \varepsilon^2 F_c^{(-4)}(0) + O(\varepsilon^{10}) \quad (\text{B.13})$$

Here, the functions $F^{(n)}$ are the coefficients of the terms of order ε^n in (B.11). In (B.12), we used a minus-plus trick by subtracting from the integrand its limit at infinity. In the remaining integral, the integrand is now $O(1/\check{K}_a^2)$; we can therefore replace the upper bound by $+\infty$, introducing a negligible error $O(\varepsilon^2)$. In (B.13), to go from the middle part to the right-hand side, we first carried out the first integral then, in the second integral, we approximated the integrand by its value at the origin; as the latter varies quartically near $\check{K}_c = 0$, the error made is indeed $O(\varepsilon^{10})$. By collecting the contributions (B.12) and (B.13) in \check{M}_{+-} with weights 1 and ε^{-4} , we see that the linear terms in Λ in the right-hand sides of these equations cancel each other. It remains (148).

References

- [1] R. Combescot, M. Yu. Kagan, S. Stringari, "Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover", Phys. Rev. A **74**, 042717 (2006).
- [2] V.A. Andrianov, V.N. Popov, "Gidrodinamicheskoe dejstvie i Boze-spektr sverhtekuchih Fermi-sistem", Teor. Mat. Fiz. **28**, 341 (1976) [Theor. Math. Phys. **28**, 829 (1976)].
- [3] H. Kurkjian, S.N. Klimin, J. Tempere, Y. Castin, "Pair-Breaking Collective Branch in BCS Superconductors and Superfluid Fermi Gases", Phys. Rev. Lett. **122**, 093403 (2019).
- [4] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas, "Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms", Science **298**, 2179 (2002).
- [5] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, C. Salomon, "Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a ^6Li Fermi gas", Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
- [6] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm, "Collective excitations of a degenerate gas at the BEC-BCS crossover", Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
- [7] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, W. Ketterle, "Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance", Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).
- [8] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, "Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas", Nature **463**, 1057 (2010).
- [9] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, "Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas", Science **335**, 563 (2012).
- [10] P. W. Anderson, "Random-phase approximation in the theory of superconductivity", Phys. Rev. **112**, 1900 (1958).
- [11] H. Kurkjian, *Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions*, PhD Thesis, École Normale Supérieure, Paris (2016).
- [12] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas", Annalen der Physik **529**, 1600352 (2017).

- [13] Y. Castin, "Simple theoretical tools for low dimension Bose gases", Lecture notes of the 2003 Les Houches Spring School *Quantum Gases in Low Dimensions*, edited by M. Olshanii, H. Perrin, L. Pricoupenko, J. Phys. IV France **116**, 89 (2004).
- [14] V. Gurarie, "Nonequilibrium Dynamics of Weakly and Strongly Paired Superconductors", Phys. Rev. Lett. **103**, 075301 (2009).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions and Éditions du CNRS, Paris, 1988).
- [16] P. Nozières, *Le problème à N corps : Propriétés générales des gaz de fermions* (Dunod, Paris, 1963).
- [17] Y. Castin, "Basic tools for degenerate Fermi gases", *Lecture notes of the 2006 Varenna Enrico Fermi School on Fermi gases*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon (SIF, 2007).
- [18] A. Schirotzek, Y. Shin, C. H. Schunck, W. Ketterle, "Determination of the superfluid gap in atomic Fermi gases by quasiparticle spectroscopy", Phys. Rev. Lett. **101**, 140403 (2008).
- [19] M. Marini, F. Pistolesi, G.C. Strinati, "Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: Analytic results for the crossover in three dimensions", Eur. Phys. J. B **1**, 151 (1998).
- [20] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, and products*, edited par A. Jeffrey, 5th edition (Academic Press, San Diego, 1994).
- [21] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover", Phys. Rev. A **93**, 013623 (2016).
- [22] S.N. Klimin, H. Kurkjian, J. Tempere, "Anderson-Bogoliubov collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures", Journal of Low Temperature Physics **196**, 102 (2019).
- [23] S.N. Klimin, J. Tempere, H. Kurkjian, "Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures", Phys. Rev. A **100**, 063634 (2019).
- [24] Z. Hadzibabic, S. Gupta, C.A. Stan, C.H. Schunck, M.W. Zwierlein, K. Dieckmann, W. Ketterle, "Fiftyfold improvement in the Number of Quantum Degenerate Fermionic Atoms", Phys. Rev. Lett. **91**, 160401 (2003).
- [25] D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, "Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms", Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004).
- [26] A.J. Leggett, "Cooper Pairing in Spin-Polarized Fermi systems", Journal de physique Colloq. **41**, C7-19 (1980).
- [27] J.R. Engelbrecht, M. Randeria, C.A.R. Sá de Melo, "BCS to Bose crossover: Broken-symmetry state", Phys. Rev. B **55**, 15153 (1997).
- [28] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, Lecture Notes in Physics 836, edited by W. Zwerger (Springer, Berlin, 2012).
- [29] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, C. Salomon, "[La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions](#)", Comptes Rendus Physique **16**, 241 (2015).
- [30] T. Cea, C. Castellani, G. Seibold, L. Benfatto, "Nonrelativistic Dynamics of the Amplitude (Higgs) Mode in Superconductors", Phys. Rev. Lett. **115**, 157002 (2015).
- [31] R. Haussmann, M. Punk, W. Zwerger, "Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms", Phys. Rev. A **80**, 063612 (2009).

Branche d'excitation collective du continuum dans les gaz de fermions condensés par paires : étude analytique et lois d'échelle

Yvan Castin

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

Hadrien Kurkjian

TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Anvers, Belgique

Résumé

Les gaz de fermions de spin $1/2$ non polarisés condensés par paires présentent une branche d'excitation collective dans leur continuum de paire brisée (V.A. Andrianov, V.N. Popov, 1976). Nous en effectuons une étude poussée à température nulle, à partir de l'équation aux énergies propres déduite de la théorie BCS dépendant du temps linéarisée, puis prolongée analytiquement au demi-plan complexe inférieur à travers sa ligne de coupure, en calculant à la fois la relation de dispersion et les poids spectraux (résidus de quasi-particule) de la branche. Dans le cas des supraconducteurs dits BCS où l'effet du réseau cristallin est remplacé par une interaction attractive à courte portée, mais où l'interaction de Coulomb doit pouvoir être prise en compte, nous nous restreignons à la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ (Δ est le paramètre d'ordre, μ le potentiel chimique) et aux nombres d'onde $q = O(1/\xi)$ où ξ est la taille d'une paire ; quand l'énergie complexe z_q est exprimée en unités de Δ et q en unités de $1/\xi$, la branche suit une loi universelle que nous déterminons, insensible à l'interaction de Coulomb. Dans le cas des atomes froids dans le raccordement CBE-BCS, il ne reste qu'une interaction de contact mais le couplage Δ/μ peut prendre des valeurs arbitraires, et nous étudions la branche à tout nombre d'onde. En couplage faible, nous prédisons trois échelles, celle déjà mentionnée $q \approx 1/\xi$, celle $q \approx (\Delta/\mu)^{-1/3}/\xi$ où la partie réelle de la relation de dispersion admet un minimum et celle $q \approx (\mu/\Delta)/\xi \approx k_F$ (k_F est le nombre d'onde de Fermi) où la branche atteint le bord de son domaine d'existence. Près du point d'annulation du potentiel chimique du côté BCS, $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, où $\xi \approx k_F$, nous trouvons les deux échelles $q \approx (\mu/\Delta)^{1/2}/\xi$ et $q \approx 1/\xi$. Dans tous les cas, la branche est de limite 2Δ et de départ quadratique en $q = 0$. Ces résultats ont été obtenus pour $\mu > 0$, où l'équation aux énergies propres admet au moins deux points de branchement $\epsilon_a(q)$ et $\epsilon_b(q)$ sur l'axe réel positif, avec un prolongement analytique par l'intervalle $[\epsilon_a(q), \epsilon_b(q)]$. Nous trouvons de nouvelles branches du continuum en prolongeant analytiquement à travers $[\epsilon_b(q), +\infty[$ ou même, pour q assez faible, où existe un troisième point de branchement réel positif $\epsilon_c(q)$, à travers $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ et $[\epsilon_c(q), +\infty[$. Du côté CBE $\mu < 0$ non étudié auparavant, où existe un seul point de branchement réel positif $\epsilon_a(q)$, nous trouvons également de nouvelles branches sous la ligne de coupure $[\epsilon_a(q), +\infty[$. Pour $\mu > 0$, certaines de ces nouvelles branches présentent à faible nombre d'onde un comportement exotique hypoacoustique $z_q \approx q^{3/2}$ ou hyperacoustique $z_q \approx q^{4/5}$. Pour $\mu < 0$, nous trouvons une branche hyperacoustique et une branche non hypoacoustique, de limite 2Δ et de départ quadratique purement réel en $q = 0$ pour $\Delta/|\mu| < 0,222$.

Mots-clés : gaz de fermions ; condensat de paires ; modes collectifs ; brisure de paire ; supraconducteur ; atomes froids ; théorie BCS

1. Introduction et position du problème

Nous considérons d'abord un gaz tridimensionnel de fermions neutres de spin $1/2$ en interaction attractive dans l'onde s à courte portée, spatialement homogène et pris à la limite thermodynamique, en d'autres termes de densité non nulle et de taille infinie. Le gaz est non polarisé, c'est-à-dire qu'il comporte le même nombre de particules dans chaque état de spin \uparrow et \downarrow , et est préparé à température nulle. Comme le prédit la théorie BCS, tous les fermions

s'assemblent alors sous l'effet de l'attraction entre \uparrow et \downarrow en des paires liées $\uparrow\downarrow$ de moment orbital nul, ces paires constituant de plus un condensat (avec une longueur de cohérence de paire infinie) et un superfluide.

Nous nous intéressons ici à des modes d'excitation collective du système et à leur relation de dispersion en fonction de leur vecteur d'onde \mathbf{q} . Nous entendons par excitation collective une mise en oscillation globale du gaz mettant en jeu des variables collectives comme la densité ρ ou le paramètre d'ordre complexe Δ du gaz, ces fonctions acquérant dans un mode propre une dépendance spatio-temporelle $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\Delta(\mathbf{r}, t)$ au vecteur d'onde \mathbf{q} et à la pulsation réelle $\omega_{\mathbf{q}}$ ou complexe $z_{\mathbf{q}}/\hbar$ (si le mode est amorti). Il s'agit ici de modes linéaires, associés à un faible écart de ρ et Δ à leur valeur dans l'état fondamental ou, en pratique, à une réponse linéaire du gaz à une faible perturbation extérieure. Nous excluons toute excitation ne conservant pas le nombre de fermions dans chaque état de spin, du genre couplage cohérent de Rabi entre \uparrow et \downarrow .

Pour mieux préciser l'objet de notre étude, rappelons que les excitations d'un gaz de fermions appariés peuvent se ranger en gros dans deux catégories. Les excitations de basse énergie ont un quantum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ petit devant l'énergie de liaison E_0 d'une paire. Elles affectent alors seulement le mouvement du centre de masse des paires, celles-ci se mettant à osciller en gardant leur intégrité : il s'agit dans ce cas d'une excitation acoustique du gaz, les modes faisant partie d'une branche sonore de départ linéaire, $\omega_{\mathbf{q}} \sim cq$ lorsque $q \rightarrow 0$, c étant la vitesse du son. Ce type d'excitation est partagé par tous les superfluides sièges d'interaction à courte portée, indépendamment de la statistique quantique des particules constituantes. Mais seul le départ de la relation de dispersion, au mieux $q\xi \lesssim 1$ où ξ est la taille d'une paire liée, est universel dans notre système ; la partie non universelle a fait l'objet d'une étude très détaillée dans la référence [1]. Les excitations de haute énergie ont un quantum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ supérieur à E_0 : comme rien ne l'empêche énergétiquement, les paires seront brisées en deux fermions libres \uparrow et \downarrow , l'un de vecteur d'onde $\mathbf{q}/2 + \mathbf{k}$ et l'autre de vecteur d'onde $\mathbf{q}/2 - \mathbf{k}$ puisque l'excitation dépose un quantum de quantité de mouvement bien défini $\hbar\mathbf{q}$; en revanche, le vecteur d'onde relatif (ou interne à la paire) \mathbf{k} n'est pas contraint.¹ Le coût énergétique d'une telle excitation par brisure de paire est donc, dans la théorie BCS, $E_{\mathbf{k}}^{(q)} = \epsilon_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}}$ où $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ est la relation de dispersion des quasi-particules BCS, qui présente une bande interdite de largeur $E_0/2$ par définition de E_0 . Comme \mathbf{k} peut décrire \mathbb{R}^3 , le spectre d'excitation $E_{\mathbf{k}}^{(q)}$ décrit un continuum à \mathbf{q} fixé, dont le bord inférieur est $\geq E_0$ et qui s'étend jusqu'à $+\infty$.

On pourrait croire qu'un tel continuum ne renferme aucun mode collectif et que l'intensité des fonctions de réponse du système à la pulsation $\omega > E_0/\hbar$ ne présente que des dépendances larges en ω , à l'exclusion de structures étroites comme une résonance lorentzienne $\propto |\hbar\omega - z_{\mathbf{q}}|^{-2}$ associée à un mode d'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$. Depuis le travail d'Andrianov et Popov [2], dans le régime d'interaction faible et à faible nombre d'onde, et sa généralisation récente au régime d'interaction et de nombre d'onde quelconque [3], nous savons que c'est le contraire qui se produit : tant que le potentiel chimique μ du gaz est > 0 , donc que le minimum $E_0/2$ de $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ est atteint dans la théorie BCS en un nombre d'onde non nul $k_0 > 0$, le gaz de fermions présente bien, dans son continuum de paire brisée, une branche d'excitation collective $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ s'étendant sur tout l'intervalle $]0, 2k_0[$. Comme le mode collectif du continuum peut s'amortir par émission de paires brisées, son énergie est complexe, $\text{Im } z_{\mathbf{q}} < 0$; à faible nombre d'onde, $q \rightarrow 0$, $z_{\mathbf{q}}$ tend vers E_0 quadratiquement en q , le mode acquiert une pulsation propre de mieux en mieux définie et induit un pic lorentzien de plus en plus étroit dans les fonctions de réponse du système, ce qui en garantit l'observabilité [3].

La branche du continuum $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ de notre gaz de fermions n'a pas fait l'objet d'études analytiques approfondies, en dehors du régime de faible nombre d'onde $q \rightarrow 0$. Par exemple, on ne sait, pour une force d'interaction quelconque, jusqu'à quelle valeur de q s'étend la loi de variation quadratique de $z_{\mathbf{q}}$ précédemment mentionnée. Ou encore, l'étude numérique de la référence [3] suggère que, dans le régime d'interaction faible, la pulsation propre $\text{Re } z_{\mathbf{q}}/\hbar$ présente sur $]0, 2k_0[$ un minimum en $q = q_{\min}$, mais rien n'est dit sur la variation de q_{\min} avec la force des interactions. À nombre d'onde q fixé > 0 , on ne sait pas non plus si la relation de dispersion admet une loi limite simple lorsque la force des interactions tend vers zéro. Dans le régime d'interaction forte, au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique ($\mu \rightarrow 0^+$) donc de disparition dans son ensemble de la branche du continuum [3], on ne connaît pas analytiquement la forme de la relation de dispersion, ni les échelles de nombre d'onde qui la structurent. Par ailleurs, la branche du continuum $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ dans les références [2, 3] a été obtenue en effectuant sur l'équation aux valeurs propres des modes du système un prolongement analytique passant du demi-plan complexe supérieur ($\text{Im } z \geq 0$) au demi-plan inférieur ($\text{Im } z < 0$) par l'intervalle naturel séparant les deux premiers points de branchement $z = \epsilon_1 = E_0$ et $z = \epsilon_2$ de l'équation aux valeurs propres sur le demi-axe réel positif, même si ce fait est implicite dans la référence

1. En réalité, la brisure de paire à \mathbf{q} fixé se fait à partir du seuil d'énergie $\inf_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{(q)}$, qui n'est autre que le bord du continuum défini plus loin.

[2]. Que se passerait-il si l'on faisait un prolongement analytique en passant plutôt par l'intervalle $[\epsilon_2, +\infty[$ ou, dans le cas où il existe un troisième point de branchement $\epsilon_3 > \epsilon_2$, par les intervalles $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ et $[\epsilon_3, +\infty[$? Pourrait-on découvrir ainsi d'autres branches du continuum? Pourrait-il même y avoir une branche du continuum pour $\mu < 0$, où les paires tendent à devenir bosoniques? Enfin, nous nous sommes limités pour l'instant aux gaz de fermions neutres, le système physique que nous avons en tête étant celui des atomes froids, qui a le bon goût de permettre un ajustement à volonté de la force des interactions par résonance de Feshbach magnétique [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Qu'en est-il des gaz d'électrons dans des supraconducteurs BCS, c'est-à-dire des supraconducteurs idéalisés, où l'effet du réseau cristallin et de ses phonons est modélisé par une interaction attractive à courte portée entre \uparrow et \downarrow ? Il faut ajouter à cette dernière l'interaction répulsive de Coulomb entre électrons, indépendante du spin et à longue portée, dont on sait qu'elle fait disparaître la branche acoustique [10]. Qu'en est-il alors de la branche du continuum? Dans la référence [2], l'équation aux valeurs propres sur la pulsation des modes a été modifiée pour tenir compte de l'interaction de Coulomb; il a alors été montré, dans la limite d'interaction faible $E_0 \ll \epsilon_F$ où ϵ_F est l'énergie de Fermi du gaz, que la branche du continuum survit et que sa relation de dispersion complexe reste la même qu'en présence de la seule interaction à courte portée, du moins tant que $q\xi \lesssim 1$ donc que la relation de dispersion reste approximativement quadratique. Peut-on, tout en restant dans le régime d'interaction faible pertinent pour les supraconducteurs BCS (E_0/ϵ_F y est typiquement de l'ordre de 10^{-3} ou 10^{-4}), étendre l'étude de la branche au-delà du régime quadratique en imposant seulement $q\xi = O(1)$ lorsque $E_0/\epsilon_F \rightarrow 0$, et voir si l'interaction de Coulomb reste toujours sans effet dans ce cas? Toutes ces questions lancinantes appellent une étude complémentaire fouillée, qui fait l'objet du présent article.

Pour parachever notre introduction, donnons le plan de l'article. La section 2 présente brièvement le formalisme utilisé : l'interaction entre fermions neutres est modélisée par une attraction de contact sur site, après discrétisation de l'espace en un réseau cubique de pas b ; pour décrire l'évolution des variables collectives indépendantes ρ , Δ et Δ^* du système après une perturbation faible de l'état fondamental circonscrite en temps, on peut utiliser les équations BCS dépendant du temps linéarisées autour de leur solution stationnaire; l'équation aux valeurs propres s'écrit comme le déterminant d'une matrice fonction de z et de \mathbf{q} , 3×3 puisqu'il y a trois variables indépendantes, et dont nous rappelons comment effectuer le prolongement analytique à $\text{Im } z < 0$ à l'aide des densités spectrales du continuum de paire brisée. Dans la section 3, nous nous concentrons sur la limite de couplage faible $E_0 \ll \epsilon_F$, plus facile à atteindre dans l'état fondamental avec les supraconducteurs BCS qu'avec les atomes froids, et que nous traitons mathématiquement en faisant tendre E_0/ϵ_F vers zéro à $q\xi$ fixé. Nous trouvons que la branche du continuum se découple des autres excitations sous la forme d'un mode de module (mettant en jeu des oscillations du seul module du paramètre d'ordre, à l'exclusion de sa phase), aussi bien pour l'interaction de contact seule (section 3.2.1) qu'en présence de l'interaction de Coulomb (section 3.2.2), avec la même équation aux valeurs propres dans les deux cas. Les densités spectrales utiles au prolongement analytique peuvent être exprimées en termes d'intégrales elliptiques (section 3.3). La branche est ensuite calculée numériquement, puis étudiée analytiquement à faible et à grand $q\xi$ dans la section 3.4. Pour être complets, nous effectuons la même étude sur la branche acoustique (mode de phase) pour la seule interaction de contact dans la section 3.5. La longue section 4 est consacrée au régime d'interaction quelconque, apanage des gaz d'atomes froids; l'interaction est seulement de contact, et elle est résonnante (sa longueur de diffusion a dans l'onde s excède grandement sa portée b en valeur absolue), ce qui oblige à prendre la limite continue $b \rightarrow 0$ de notre modèle sur réseau : l'équation aux valeurs propres se réduit au déterminant d'une matrice 2×2 (section 4.1). Son prolongement analytique est effectué dans le cas $\mu > 0$ (où $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$) en passant par l'intervalle $[\epsilon_1, \epsilon_2]$, sauf dans la section 4.8. Nous donnons dans la section 4.2 la position sur le demi-axe réel positif des points de branchement ϵ_1 , ϵ_2 , voire ϵ_3 , en fonction de q , et l'expression des densités spectrales sur chaque intervalle entre les points de branchement et l'infini. Nous enrichissons notre étude de la branche du continuum (par rapport à la section 3) en introduisant dans la section 4.3 d'autres observables que sa relation de dispersion complexe $q \mapsto z_q$, à savoir son poids spectral (résidu) sur les faibles écarts à l'équilibre du paramètre d'ordre en phase ou en module, et la superposition cohérente de ces deux voies permettant de maximiser le poids spectral dans le signal expérimental. Nous présentons une étude numérique complète de la branche du continuum dans la section 4.4, puis en effectuons une étude analytique à faible q dans la section 4.5, en précisant cette fois (au contraire de la référence [3]) le domaine de validité de l'approximation quadratique, ce qui fait apparaître la condition attendue $q\xi \ll 1$ dans le régime d'interaction faible mais la condition autre et non intuitive $q/k_0 \ll (\mu/\Delta)^{1/2}$ dans le régime $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ d'annulation du potentiel chimique. Dans la section 4.6, consacrée à la limite d'interaction faible $\Delta/\mu \ll 1$, il nous faut, pour épuiser le problème, étudier la branche successivement à trois échelles de nombre d'onde, à $q \approx 1/\xi$ c'est-à-dire $q \approx k_0\Delta/\mu$ (section 4.6.1), à $q \approx k_0$ (section 4.6.2) et à l'échelle inattendue $q \approx k_0(\Delta/\mu)^{2/3}$ régissant la position du minimum de $q \mapsto \text{Re } z_q$ (section 4.6.3). Dans la

section 4.7, consacrée à la limite inverse $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, il suffit de nous placer successivement à l'échelle $q \approx k_0$ (section 4.7.1) et à l'échelle $q \approx k_0(\mu/\Delta)^{1/2}$ (section 4.7.2) pour obtenir une description complète. Enfin, dans la section 4.8, nous cherchons et parfois trouvons des modes du continuum plus exotiques en effectuant le prolongement analytique pour $\mu > 0$ par les autres fenêtres $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ et $[\epsilon_3, +\infty[$, et en étendant même l'étude au cas $\mu < 0$ (où $k_0 = 0$). Nous concluons dans la section 5.

2. Rappels de formalisme : modèle, équations BCS dépendant du temps linéarisées, densités spectrales, prolongement analytique

Le modèle et le formalisme du présent article sont ceux des références [11, 12], dont nous rappelons ici les grandes lignes. Les fermions à deux états internes \uparrow et \downarrow vivent avec des conditions aux limites périodiques dans le volume de quantification $[0, L]^3$ discrétisé en un réseau cubique de pas b , dans l'ensemble grand canonique de potentiel chimique $\mu = \mu_\uparrow = \mu_\downarrow$. La relation de dispersion d'un fermion seul sur le réseau est celle $\mathbf{k} \mapsto E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ de l'espace libre sur la première zone de Brillouin $\mathcal{D} = [-\pi/b, \pi/b]^3$ du réseau, et est étendue par périodicité au-delà. Les fermions de spins opposés subissent l'interaction binaire de contact $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g_0 \delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} / b^3$, où δ est un delta de Kronecker et la constante de couplage nue est ajustée en fonction du pas du réseau pour reproduire la longueur de diffusion a souhaitée entre fermions dans l'onde s : $1/g_0 = 1/g - \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}$ où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage effective [13].

Initialement, le gaz de fermions est préparé dans l'état fondamental, non polarisé par symétrie entre \uparrow et \downarrow . L'état est décrit de manière variationnelle approchée par l'habituel ansatz BCS, état cohérent de paires liées $\uparrow\downarrow$ de particules $|\psi_{\text{BCS}}^{(0)}\rangle$ minimisant l'énergie. Il admet un paramètre d'ordre Δ défini plus bas et un spectre d'excitation de quasi-particule par brisure de paire de la forme habituelle $\epsilon_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}$, où \mathbf{k} décrit \mathcal{D} et $\xi_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} - \mu + g_0\rho/2$ contient le déplacement d'énergie grand canonique et celui de Hartree de champ moyen proportionnel à la densité totale ρ .

Le gaz est ensuite soumis à une perturbation extérieure quelconque, si ce n'est qu'elle conserve le nombre de particules dans \uparrow et dans \downarrow , et qu'elle est suffisamment faible pour qu'on puisse limiter son action, dans le cadre variationnel BCS, à la création d'un état cohérent de paires de quasi-particules de faible amplitude $|\beta| \ll 1$. Aux instants $t > 0$ postérieurs à la perturbation, le vecteur d'état du gaz s'écrit donc

$$|\psi_{\text{BCS}}(t)\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left[- \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(t) \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle \quad (1)$$

où les opérateurs d'annihilation $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ et de création $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ d'une quasi-particule BCS de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin σ obéissent aux habituelles relations d'anticommuation fermioniques. Les paramètres variationnels indépendants sont les amplitudes de probabilité $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(t)$ d'avoir brisé une paire liée en deux quasi-particules de spins opposés et de vecteurs d'onde $\mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$; \mathbf{q} représente donc le vecteur d'onde total (ou du centre de masse) de la paire brisée, et \mathbf{k} son vecteur d'onde interne (ou relatif); $\mathcal{N}(t)$ est un facteur de normalisation.

À l'ordre un en les amplitudes β , on tire de l'ansatz (1) les expressions du paramètre d'ordre $\Delta(\mathbf{r}, t)$ et de la densité totale $\rho(\mathbf{r}, t)$ du gaz excité au point \mathbf{r} et à l'instant t :

$$\Delta(\mathbf{r}, t) \equiv g_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + O(\beta^2) \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \langle \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} V_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{q}} \delta\rho_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + O(\beta^2) \quad (3)$$

Ce sont les variables au travers desquelles pourront se manifester les modes collectifs du système. Au troisième membre de ces expressions apparaît d'abord la contribution constante de l'état stationnaire initial, fonction des amplitudes $U_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 + \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ et $V_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 - \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ des modes de quasi-particules sur les particules et les trous. Viennent ensuite des termes linéaires en β modulés spatialement aux vecteurs d'onde \mathbf{q} des paires, et dont on peut tirer la dépendance en temps de celle des $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$, elle-même déduite de l'habituel calcul variationnel. Comme dans la référence [11], il est astucieux d'introduire des combinaisons linéaires plus et moins des β et β^* partiellement découplantes; nous avons besoin ici seulement de leur valeur à $t = 0^+$:

$$\gamma_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm = \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(0^+) \pm \beta_{\mathbf{k}(-\mathbf{q})}^*(0^+) \quad (4)$$

qui donne accès déjà aux valeurs des amplitudes de Fourier dans les équations (2,3) juste après l'excitation :

$$\delta\Delta_{\mathbf{q}}(0^+) \mp \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(0^+) = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}, \mathbf{y}_{\mathbf{kq}}}^\pm \quad \text{et} \quad \delta\rho_{\mathbf{q}}(0^+) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}, \mathbf{y}_{\mathbf{kq}}}^0 \quad (5)$$

Les équations du mouvement linéarisées des variables $\beta \pm \beta^*$ sont données dans la référence [11]. La valeur ajoutée ici est d'en prendre la transformée de Laplace, d'en déduire celle des amplitudes de Fourier dans (2,3) puis, par transformation de Laplace inverse, d'obtenir la dépendance en temps de ces dernières :

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) - \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) + \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\rho_{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix} = \int_{i\eta+\infty}^{i\eta-\infty} \frac{dz}{2i\pi} e^{-izt/\hbar} M(z, \mathbf{q}) \begin{pmatrix} \Sigma_{W^+ y^-}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^+ y^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^- y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^- y^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^0 y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^0 y^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

les valeurs de \mathbf{q} différentes étant découplées par conservation de l'impulsion. L'intégrale sur z est prise dans le plan complexe en survolant l'axe réel ($\eta > 0$, voire $\eta \rightarrow 0^+$). L'intégrande contient, en plus de l'exponentielle oscillant à la pulsation complexe z/\hbar , un vecteur source à trois composantes et l'inverse d'une matrice 3×3 , tous deux fonctions de z . Après passage à la limite thermodynamique $L \rightarrow +\infty$, on aboutit à une écriture compacte, en particulier

$$M(z, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \check{\Sigma}_{W^+ W^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) & \Sigma_{W^+ W^-}^z(z, \mathbf{q}) & -g_0 \Sigma_{W^+ W^0}^z(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^- W^+}^z(z, \mathbf{q}) & \check{\Sigma}_{W^- W^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) & -g_0 \Sigma_{W^- W^0}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^0 W^+}^z(z, \mathbf{q}) & \Sigma_{W^0 W^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) & 1 - g_0 \Sigma_{W^0 W^0}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M_{++}(z, \mathbf{q}) & M_{+-}(z, \mathbf{q}) & M_{+0}(z, \mathbf{q}) \\ M_{-+}(z, \mathbf{q}) & M_{--}(z, \mathbf{q}) & M_{-0}(z, \mathbf{q}) \\ M_{0+}(z, \mathbf{q}) & M_{0-}(z, \mathbf{q}) & M_{00}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

grâce à la notation abrégée d'intégrales sur le vecteur d'onde interne \mathbf{k} des paires :

$$\Sigma_{ab}^z(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{z a_{\mathbf{kq}} b_{\mathbf{kq}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{kq}}^2}, \quad \Sigma_{ab}^\epsilon(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mathbf{kq}} a_{\mathbf{kq}} b_{\mathbf{kq}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{kq}}^2}, \quad \check{\Sigma}_{ab}^\epsilon(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{kq}} a_{\mathbf{kq}} b_{\mathbf{kq}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{kq}}^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (8)$$

La version avec accent $\check{\Sigma}$ contient un contre-terme $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$, obtenu en éliminant g_0 au profit du paramètre d'ordre ($-1/g_0 = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}$), qui assure la convergence ultraviolette de l'intégrale à la limite continue $b \rightarrow 0$; les versions sans accent convergent telles quelles lorsque $b \rightarrow 0$. Chaque symbole Σ présente sous le signe intégral le dénominateur d'énergie attendu, contenant l'énergie $\epsilon_{\mathbf{kq}}$ de la paire brisée, et au numérateur des amplitudes de couplage entre quasi-particules fonctions de leurs amplitudes modales :

$$W_{\mathbf{kq}}^\pm = U_{\mathbf{k+q}/2} U_{\mathbf{k-q}/2} \pm V_{\mathbf{k+q}/2} V_{\mathbf{k-q}/2}, \quad W_{\mathbf{kq}}^0 = U_{\mathbf{k+q}/2} V_{\mathbf{k-q}/2} + U_{\mathbf{k-q}/2} V_{\mathbf{k+q}/2}, \quad \epsilon_{\mathbf{kq}} = \epsilon_{\mathbf{k+q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k-q}/2} \quad (9)$$

Dans la matrice M , elles apparaissent par paires de facteurs, qui ont les expressions plus explicites suivantes :

$$\begin{aligned} (W^+)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & W^+ W^- &= \frac{\xi_+}{2\epsilon_+} + \frac{\xi_-}{2\epsilon_-} & W^+ W^0 &= \frac{\Delta}{2\epsilon_+} + \frac{\Delta}{2\epsilon_-} \\ (W^-)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + \xi_+ \xi_- - \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & W^- W^0 &= \frac{(\xi_+ + \xi_-)\Delta}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & (W^0)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- - \xi_+ \xi_- + \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} \end{aligned} \quad (10)$$

où l'on a noté, pour abrégé, $\epsilon_\pm = \epsilon_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$ et $\xi_\pm = \xi_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$. L'ensemble (à partir de l'équation (6)) constitue une généralisation magistrale de l'équation (12) de la référence [14] à un vecteur d'onde d'excitation \mathbf{q} non nul et à une perturbation infinitésimale arbitraire non polarisante de l'état BCS stationnaire initial.

L'équation (6) évoque fortement le formalisme des fonctions de Green et de la résolvante. Il est naturel de lui appliquer la formule des résidus, c'est-à-dire le théorème de Cauchy, en refermant le chemin d'intégration par un demi-grand cercle dans le demi-plan complexe inférieur, parcouru dans le sens trigonométrique et de rayon divergent. Comme d'habitude, l'idée doit être adaptée pour contourner par des lacets les lignes de coupure issues de l'annulation des dénominateurs dans les symboles Σ de (8) lorsque z ou $-z$ tombe dans le continuum de paire brisée $\{\epsilon_{\mathbf{kq}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$, ou plutôt les nouvelles lignes de coupure obtenues par déformation et rotation des lignes de coupure *originelles* autour de leur point de branchement (les nouvelles lignes de coupure sont souvent disposées verticalement dans le demi-plan inférieur), voir le complément A_{III} de la référence [15] et notre figure 1; après contournement d'une nouvelle ligne de

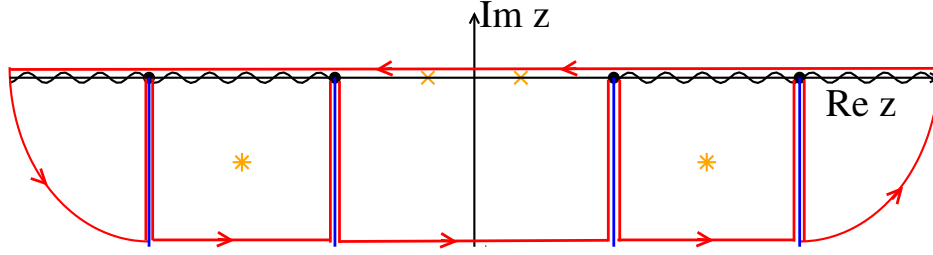


FIGURE 1: Dans le plan complexe, chemin d'intégration à suivre et prolongements analytiques à effectuer pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy à l'intégrale (6). On se place dans le cas où l'intégrande comporte deux points de branchement (disques noirs) sur le demi-axe réel positif, et deux autres sur le demi-axe réel négatif compte tenu de la symétrie $z \leftrightarrow -z$. Ses lignes de coupure originelles sont représentées en ondulé. Pour fixer les idées, les lignes de coupure déplacées par prolongement analytique sont disposées verticalement sous la forme de demi-droites (traits pleins bleus). Le chemin d'intégration, qui les contourne, est représenté par la ligne rouge fléchée. Étoiles orange : pôles apparaissant dans le prolongement analytique (ce sont des racines de $\det M_{\downarrow}(z, \mathbf{q})$ de degré entier). Croix orange : pôles apparaissant sur l'axe réel, sans besoin de prolongement analytique (ce sont les racines de $\det M(z, \mathbf{q})$ de degré entier).

coupure, l'intégrande de (6) doit bien sûr être remplacé par son prolongement analytique du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur à travers la ligne de coupure *originelle* déplacée dont elle provient.

Dans la formule des résidus appliquée à (6) ainsi transformée, on associe par définition à chaque pôle $z_{\mathbf{q}}$ de l'intégrande² un mode collectif d'énergie propre $z_{\mathbf{q}}$, et le résidu inclut le facteur exponentiel $\exp(-iz_{\mathbf{q}}t/\hbar)$, seul à dépendre du temps. Comme les éléments de matrice de M ne présentent pas de pôle même après prolongement analytique, ni le vecteur source d'ailleurs, et compte tenu de l'écriture de la matrice inverse $M^{-1} = {}^t\text{com } M / \det M$ en termes de la comatrice et de son déterminant, tout pôle ne peut provenir que de l'annulation de $\det M$ (ou de son prolongement analytique) avec une loi de puissance entière en $z_{\mathbf{q}}$. Il y a donc deux cas possibles : (i) le pôle se situe sur l'axe réel, aucun prolongement analytique n'est requis, $z_{\mathbf{q}}$ est en fait une énergie réelle $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ et le mode est non amorti, (ii) le pôle se situe dans le demi-plan complexe inférieur, il a fallu effectuer un prolongement analytique de $\det M$ pour le faire apparaître, $z_{\mathbf{q}}$ est complexe ($\text{Im } z_{\mathbf{q}} < 0$) et le mode est amorti exponentiellement. Pour trouver tous les modes collectifs au vecteur d'onde \mathbf{q} , il faut donc résoudre les deux équations suivantes :

$$\boxed{\det M(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0, \quad \det M_{\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0} \quad (11)$$

la flèche verticale dans la seconde équation représentant le prolongement analytique à $\text{Im } z < 0$. Notons que, si l'excitation du gaz est mal choisie, il se peut que le vecteur source dans (6) ou son prolongement analytique s'annule en $z = z_{\mathbf{q}}$, auquel cas le résidu de l'intégrande est nul en $z_{\mathbf{q}}$ et le mode ne s'exprime pas.

Reste à savoir comment effectuer en pratique le prolongement analytique des éléments de matrice de M au demi-plan inférieur. On peut utiliser [3] un résultat figurant dans l'appendice C de [16], pour toute fonction $f(z)$ s'écrivant comme une intégrale sur la variable réelle ϵ , avec un dénominateur d'énergie $z - \epsilon$ et une densité spectrale $\rho(\epsilon)$:

$$f(z) = \int_{\epsilon_a}^{\epsilon_b} d\epsilon \frac{\rho(\epsilon)}{z - \epsilon} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [\epsilon_a, \epsilon_b] \implies f_{\downarrow}(z) = f(z) - 2i\pi\rho(z) \quad \text{pour } \text{Im } z \leq 0 \quad (12)$$

le prolongement analytique s'effectuant bien sûr en passant au travers de la ligne de coupure $[\epsilon_a, \epsilon_b]$ de $f(z)$, qu'il rabat sur $]-\infty, \epsilon_a] \cup [\epsilon_b, +\infty[$. Pour que (12) s'applique, il faut que la densité spectrale $\rho(\epsilon)$ admette un prolongement analytique $\rho(z)$ au demi-plan inférieur, donc qu'elle soit déjà analytique sur l'intervalle $[\epsilon_a, \epsilon_b]$. En pratique, on est amené à découper la fonction à prolonger en somme de termes de type $f(z)$, les bornes ϵ_a, ϵ_b , etc. correspondant aux positions successives des singularités de $\rho(\epsilon)$ sur l'axe réel (points de divergence, de discontinuité, points anguleux). Dans le cas des éléments de matrice (8), ceci se fait comme dans [3] au moyen des densités spectrales³

$$\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q}) \equiv \int d^3k \frac{1}{2} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^s W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{s'} \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}) \quad \forall s, s' \in \{+, -, 0\} \quad (13)$$

2. Par parité en z de $\det M(z, \mathbf{q})$, on convient que $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > 0$ dans la définition de l'énergie complexe d'un mode.

3. Pour que $\rho_{ss'}$ soit la densité spectrale de $M_{ss'}$ au sens de (12), il faudrait inclure dans sa définition un facteur $(2\pi)^{-3}$. Nous ne l'avons pas fait ici, de manière que les fonctions $\rho_{ss'}$ coïncident avec celles de la référence [3].

que nous calculerons en temps utile dans la suite.

3. Limite de couplage faible $\Delta \ll \mu$: le cas des supraconducteurs BCS

3.1. Régime considéré

Dans cette section, l'interaction de contact entre fermions de spins opposés est très faiblement attractive : sa longueur de diffusion a est négative et très petite en valeur absolue devant la distance moyenne entre particules, ou si l'on préfère devant l'inverse $1/k_F$ du nombre d'onde de Fermi du gaz, $k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}$. On peut également supposer que $|a|$ est plus faible que le pas b du modèle sur réseau, donc que la portée de l'interaction : l'interaction binaire est non résonnante et dans le régime de Born de la théorie de la diffusion. Nous disposons en définitive de la chaîne d'inégalités $0 < -a \ll b \ll 1/k_F$.

C'est sous ces conditions que la théorie BCS est la plus quantitative. Elle donne la bonne équation d'état du gaz à l'ordre un en $k_F a$ et tient compte correctement du déplacement de Hartree de la position k_0 du minimum du spectre d'excitation BCS (voir la section 3.4.4 de [17] et la référence [18]). Dans la chaîne d'inégalités, la dernière assure que la physique est peu affectée par la discrétisation de l'espace et permet de remplacer le domaine d'intégration \mathcal{D} par \mathbb{R}^3 dans (8); l'avant-dernière permet de remplacer la constante de couplage nue g_0 par la constante effective $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ dans l'équation d'état du gaz $\mu = \epsilon_F + g\rho/2$, dans le spectre d'excitation BCS $\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \epsilon_F)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ (d'où la position du minimum $k_0 = k_F$) et dans la troisième colonne de la matrice (7).

Comme le paramètre d'ordre est exponentiellement petit en la force des interactions, $\Delta/\epsilon_F \approx 8e^{-2} \exp(-\pi/2k_F|a|)$ dans la théorie BCS, nous étudions dans cette section la branche du continuum à l'ordre dominant en Δ , c'est-à-dire que nous faisons tendre mathématiquement Δ vers zéro après avoir effectué les changements d'échelle idoines sur l'énergie complexe z_q et le nombre d'onde q assurant l'existence d'une limite finie et non nulle.

3.2. Découplage du mode de module

3.2.1. En présence d'une interaction de contact

Avant de passer à la limite mathématique $\Delta \rightarrow 0$, il faut regarder la branche du continuum aux bonnes échelles d'énergie et de nombre d'onde que sont naturellement l'énergie de liaison 2Δ et l'inverse $1/\xi$ de la taille $\xi \propto \hbar^2 k_0/m\Delta$ [19] d'une paire liée de fermions $\uparrow\downarrow$, donc garder constantes les variables réduites

$$\bar{q} = \frac{\hbar^2 k_0 q}{m\Delta} \quad \text{et} \quad \bar{z} = z/\Delta \quad (14)$$

Alors, pour obtenir une limite non nulle dans les éléments de matrice (7) de M , c'est-à-dire dans les intégrales (8), il faut effectuer en coordonnées sphériques d'axe polaire \mathbf{q} le changement de variable

$$k = k_0 + \frac{m\Delta}{\hbar^2 k_0} \bar{K} \quad (15)$$

sur le module du vecteur d'onde interne des paires et faire tendre Δ vers zéro à \bar{K} fixé. En d'autres termes, les intégrales (8) sont dominées ici par une fine couche de largeur en énergie $\propto \Delta$ autour de la surface de Fermi du gaz.⁴ Effectuons d'abord le passage à la limite dans le spectre d'excitation BCS :

$$\xi_{\pm}/\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{\bar{K}, \bar{q} \text{ fixés}} \bar{K} \pm \frac{1}{2} \bar{q} u \equiv x_{\pm}(\bar{K}, u) \quad \text{et} \quad \epsilon_{\pm}/\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{\bar{K}, \bar{q} \text{ fixés}} (1 + x_{\pm}^2)^{1/2} \equiv e_{\pm}(\bar{K}, u) \quad (16)$$

4. Si l'on fait $\Delta \rightarrow 0$ à \mathbf{k} fixé, avec $q = O(\Delta)$ et $z = O(\Delta)$, les intégrales de tous les Σ et $\tilde{\Sigma}$ tendent vers zéro, ce qui justifie cette affirmation et notre procédure.

u étant le cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{k} et \mathbf{q} , puis dans les intégrales elles-mêmes afin d'obtenir leur approximation d'ordre zéro en Δ/μ , repérées par l'exposant (0) :

$$\check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \left[\frac{(e_+ + e_-)(e_+e_- + x_+x_- + 1)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} + \frac{1}{2(\bar{K}^2 + 1)^{1/2}} \right] \neq 0 \quad (17)$$

$$\check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \left[\frac{(e_+ + e_-)(e_+e_- + x_+x_- - 1)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} + \frac{1}{2(\bar{K}^2 + 1)^{1/2}} \right] \neq 0 \quad (18)$$

$$\Sigma_{W^+W^-}^{z(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{\bar{z}(x_+e_- + x_-e_+)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \equiv 0 \quad (19)$$

$$\Sigma_{W^+W^0}^{z(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{\bar{z}(e_+ + e_-)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \neq 0 \quad (20)$$

$$\Sigma_{W^-W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{(e_+ + e_-)(x_+ + x_-)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \equiv 0 \quad (21)$$

$$\Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{(e_+ + e_-)(e_+e_- - x_+x_- + 1)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \neq 0 \quad (22)$$

Une simplification se produit : les intégrales (19) et (21) sont identiquement nulles par imparité de leur intégrande sous l'échange de (K, u) en $(-K, -u)$, qui transforme x_+ et x_- en leur opposé mais laisse e_+ et e_- inchangés. Du coup, la deuxième colonne de la matrice M dans (7) se réduit à son élément sur la diagonale et la première équation aux valeurs propres dans (11) se découple en deux équations indépendantes :

$$\boxed{M_{--}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \equiv \check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = 0 \quad \text{ou} \quad \left[1 - g\Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right] \check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) + g \left[\Sigma_{W^+W^0}^{z(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right]^2 = 0} \quad (23)$$

La première porte seulement sur la variable $-$, c'est-à-dire la seconde composante du vecteur (6) des variables collectives, la combinaison linéaire de $\delta\Delta_{\mathbf{q}}$ et de $\delta\Delta_{\mathbf{q}}^*$ reconstruisant l'écart du module $|\Delta(\mathbf{r}, t)|$ du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre. C'est elle qui va donner naissance, après prolongement analytique et calcul explicite dans la section 3.4, au mode du continuum, qui est donc, dans la limite de couplage faible et à l'échelle d'énergie Δ , un mode de *module*. Ce résultat était connu pour une interaction entre \uparrow et \downarrow de portée nulle ($b \rightarrow 0$) [2]; nous voyons qu'il survit ici à une portée non nulle, même beaucoup plus grande que $|a|$. La seconde équation dans (23) donne naissance au mode acoustique. Elle couple la variable $+$ (faible écart de phase du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre) et la variable 0 (faible écart de densité du gaz); c'est seulement si l'on fait tendre g vers zéro, comme dans la section 3.5, que la variable $+$ se découple de la densité et que le mode acoustique devient un pur mode de *phase* comme dans [2].

3.2.2. En présence également de l'interaction de Coulomb

Dans un supraconducteur BCS, les fermions appariés ne sont pas des particules neutres, mais des électrons de charge $-e$. Il faudrait donc compléter notre hamiltonien modèle, en ajoutant à l'interaction à courte portée b entre \uparrow et \downarrow le potentiel d'interaction de Coulomb à longue portée et indépendant du spin,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tilde{e}^2}{r} \quad (24)$$

donc agissant aussi bien entre particules de même spin que de spin opposé. Ce ne serait pas une mince affaire. Heureusement, le travail a déjà été effectué dans la référence [2], dans la limite où la portée b tend vers zéro à longueur de diffusion a de l'interaction à courte portée fixée. L'équation aux valeurs propres sur l'énergie z des modes de vecteur d'onde \mathbf{q} prend la forme d'un déterminant $\det \hat{K} = 0$, où \hat{K} est une matrice 3×3 que nous n'écrivons pas, mais dont les coefficients s'expriment en termes de fonctions $A(\mathbf{q}, \pm z)$, $B(\mathbf{q}, z)$, $C(\mathbf{q}, z)$ et $D(\mathbf{q}, \pm z)$.⁵ De manière remarquable, nous sommes parvenus, après une intégration à température nulle sur la fréquence de Matsubara non

5. La référence [2] affirme à tort, après son équation (3.9), que $D(z, \mathbf{q})$ est une fonction impaire du quadrivecteur (z, \mathbf{q}) ; ceci n'est vrai que dans la limite de couplage faible aux échelles de (14).

effectuée dans [2], à relier ces fonctions du problème coulombien aux fonctions (8) du problème non coulombien comme suit :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}, iz) &= \frac{1}{2} \left[\check{\Sigma}_{W^+W^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) + \check{\Sigma}_{W^-W^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \right] - \Sigma_{W^+W^-}^z(z, \mathbf{q}) & C(\mathbf{q}, iz) &= \frac{q^2}{4\pi} - 2\check{e}^2 \Sigma_{W^0W^0}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ B(\mathbf{q}, iz) &= \frac{1}{2} \left[\check{\Sigma}_{W^-W^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) - \check{\Sigma}_{W^+W^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \right] & D(\mathbf{q}, iz) &= i\check{e} \left[\Sigma_{W^+W^0}^z(z, \mathbf{q}) - \Sigma_{W^-W^0}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

De plus, dans la limite de couplage faible, l'équation aux valeurs propres se découple de la même façon que dans le cas non coulombien (23) :

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = 0 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{q^2}{8\pi\check{e}^2} - \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right] \check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) + \left[\Sigma_{W^+W^0}^{z(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right]^2 = 0 \quad (26)$$

La première équation reste exactement la même : aux échelles d'énergie et de nombre d'onde de (14), le mode du continuum n'est donc absolument pas affecté par l'interaction de Coulomb à l'ordre zéro en Δ . La seconde équation se déduit de celle de (23) par la substitution suivante sur la constante de couplage effective :

$$g \rightarrow 2\check{V}(\mathbf{q}) = \frac{8\pi\check{e}^2}{q^2} \quad (27)$$

où $\check{V}(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de $V(\mathbf{r})$. L'interprétation en est simple : g représente, en fait, la transformée de Fourier du potentiel d'interaction au vecteur d'onde \mathbf{q} , ce qui passe inaperçu pour une interaction de portée nulle (la transformée de Fourier d'un Dirac est constante), mais saute aux yeux pour l'interaction de Coulomb ; le facteur 2 tient compte du fait que $V(\mathbf{r})$ couple chaque état de spin aux deux autres (au contraire de l'interaction de contact) ; enfin, g disparaît complètement dans la substitution (27), au lieu d'être simplement complété par le terme $2\check{V}(\mathbf{q})$, car le formalisme de [2] est écrit dans la limite de portée nulle $b/|a| \rightarrow 0$, où la constante de couplage nue g_0 apparaît en lieu et place de g comme dans la troisième colonne de (7) et tend vers zéro.

Le résultat (26) figurait déjà dans [2], mais jusqu'à $\bar{q} \lesssim 1$ seulement. Ajoutons que, pour lui donner un sens mathématique précis, il faut que le terme $q^2/8\pi\check{e}^2$ reste constant lorsque $\Delta \rightarrow 0$. Il ne suffit donc pas de fixer \bar{q} et \bar{z} comme dans (14), il faut aussi fixer le rapport $\hbar\omega_0/\Delta$ entre la pulsation plasma ω_0 du gaz coulombien dans sa phase normale (voir l'équation (3.8) de la référence [2]) et son paramètre d'ordre Δ dans l'état fondamental. On a en effet

$$\frac{q^2}{8\pi\check{e}^2} = \frac{2\bar{q}^2}{3} \frac{\Delta^2}{(\hbar\omega_0)^2} \frac{mk_F}{(2\pi\hbar)^2} \quad \text{avec} \quad \frac{(\hbar\omega_0)^2}{\Delta^2} \equiv \frac{4\pi\hbar^2\check{e}^2\rho/m}{\Delta^2} \quad (28)$$

3.3. Expression analytique de densités spectrales

3.3.1. La densité spectrale $\rho_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$

Pour déterminer la relation de dispersion du mode de module, c'est-à-dire la branche du continuum, il nous faut calculer la fonction $M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$ apparaissant dans (23,26) et trouver ses racines après prolongement analytique au demi-plan inférieur. Nous avons besoin pour cela, voir la procédure (12), de connaître la densité spectrale associée (13), avec $s = s' = -$, dans la limite de couplage faible. Comme dans la section 3.2.1, nous faisons tendre Δ vers zéro dans $\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{q})$ en fixant l'énergie réduite $\bar{\epsilon} = \epsilon/\Delta$ et les nombres d'onde réduits \bar{q} et \bar{K} des équations (14,15), et obtenons la limite finie et non nulle

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{\pi mk_0}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{e_+ e_- + x_+ x_- - 1}{2e_+ e_-} \delta(e_+ + e_- - \bar{\epsilon}) \quad (29)$$

Grâce à la distribution δ de Dirac fixant l'énergie totale dans l'intégrande, il est possible de l'intégrer explicitement au moins une fois en résolvant l'équation $e_+ + e_- = \bar{\epsilon}$, par exemple sur la variable \bar{K} , comme il est fait dans l'Annexe A.1 :

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = \frac{2\pi mk_0}{\hbar^2} \int_0^1 du \Theta(\bar{\epsilon}^2 - (4 + u^2\bar{q}^2)) \left(\frac{4 + u^2\bar{q}^2 - \bar{\epsilon}^2}{u^2\bar{q}^2 - \bar{\epsilon}^2} \right)^{1/2} \quad (30)$$

où Θ est la fonction de Heaviside. Pour effectuer l'intégrale angulaire restante, il faut distinguer suivant la valeur de $\bar{\epsilon}$ trois cas : (i) l'argument de Θ est négatif sur tout l'intervalle d'intégration, (ii) il change de signe sur l'intérieur de l'intervalle, et (iii) il est positif sur tout l'intervalle. Aux énergies frontières entre ces cas, la densité spectrale admet un point anguleux. Les trois expressions analytiques correspondantes sont différentes, et sont repérées par des exposants en chiffres romains, voir la table 1.

$\bar{\epsilon} < 2$	$\rho_{--}^{(0)\text{I}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = 0$ $\rho_{++}^{(0)\text{I}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = 0$
$2 < \bar{\epsilon} < (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$	$\rho_{--}^{(0)\text{II}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) - \frac{2}{\bar{q}\bar{\epsilon}} K \left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$ $\rho_{++}^{(0)\text{II}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$
$(4 + \bar{q}^2)^{1/2} < \bar{\epsilon}$	$\rho_{--}^{(0)\text{III}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) - \frac{2}{\bar{q}\bar{\epsilon}} F \left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$ $\rho_{++}^{(0)\text{III}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E \left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \right) \right]$

TABLE 1: Densités spectrales -- et ++ à la limite de couplage faible. On a pris la limite $\Delta/\mu \rightarrow 0$ à énergie réduite $\bar{\epsilon} = \epsilon/\Delta$ et nombre d'onde réduit $\bar{q} = \hbar^2 k_0 q/m\Delta$ fixés, k_0 étant la position du minimum Δ de la relation de dispersion BCS. Sur chaque intervalle d'énergie considéré, ce sont des fonctions régulières, prolongeables analytiquement aux énergies complexes. $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ sont les intégrales elliptiques de seconde et de première espèce, dans la convention §8.111 de la référence [20]; $E(k) \equiv E(\pi/2, k)$ et $K(k) \equiv F(\pi/2, k)$ sont leurs formes complètes.

Profitons de notre connaissance de la densité spectrale pour exprimer la fonction $M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$ sous la forme commode d'une intégrale simple sur l'énergie. La présence du contre-terme dans l'intégrale (18) assurant sa convergence ultraviolette pose une petite difficulté technique. Nous la contournons en introduisant une coupure arbitrairement grande sur \bar{K} , ce qui permet de séparer le contre-terme et d'exprimer le reste comme une intégrale avec coupure sur l'énergie; nous soustrayons au tout la quantité $M_{--}^{(0)}(2, 0)$, transformée au préalable de la même façon, puis nous faisons tendre la coupure vers l'infini. Or $M_{--}^{(0)}(2, 0) = 0$, compte tenu de la relation exacte (53) à venir. Il reste donc

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = (2\pi)^{-3} \int_2^{+\infty} d\bar{\epsilon} \left[\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{\bar{z} + \bar{\epsilon}} \right) - \rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) \left(\frac{1}{2 - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{2 + \bar{\epsilon}} \right) \right] \quad (31)$$

où la densité spectrale au nombre d'onde nul, tirée par exemple de la table 1 en faisant tendre \bar{q} vers zéro sur l'intervalle III, vaut simplement

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) = \frac{2\pi m k_0}{\hbar^2} \Theta(\bar{\epsilon} - 2) \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \quad (32)$$

3.3.2. La densité spectrale $\rho_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$

Pour déterminer la relation de dispersion du mode de phase du gaz de particules neutres, c'est-à-dire la branche acoustique après prise de la limite $g \rightarrow 0$ dans la seconde équation de (23), il nous faut calculer la fonction $M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \Sigma_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q})$. Aucun prolongement analytique n'est requis, mais la connaissance de la densité spectrale associée $\rho_{++}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q})$ nous ramène à une intégrale simple sur l'énergie, plutôt qu'à l'intégrale double (17). Nous procédons donc comme dans la section 3.3.1 pour obtenir

$$M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = (2\pi)^{-3} \int_2^{+\infty} d\bar{\epsilon} \left[\rho_{++}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{\bar{z} + \bar{\epsilon}} \right) - \rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) \left(\frac{1}{2 - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{2 + \bar{\epsilon}} \right) \right] \quad (33)$$

L'expression analytique de la densité spectrale ++ à \bar{q} quelconque figure dans la table 1, celle -- à $\bar{q} = 0$ figure dans (32), et nous avons comme dans (31) utilisé le point relais $(\bar{z}, \bar{q}) = (2, 0)$ où $M_{--}^{(0)}$ s'annule, pour faire disparaître le contre-terme de l'intégrale (17) dans la différence $M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - M_{--}^{(0)}(2, 0)$.

3.4. Étude de la branche d'excitation du module

La première équation de (23) et de (26) n'admet pas de solution sur l'axe réel. Nous en effectuons donc le prolongement analytique au demi-plan complexe inférieur, en passant ici entre ses points de branchement $\bar{z} = 2$ et $\bar{z} = (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$, c'est-à-dire en utilisant, au sens de la table 1, l'expression de type II de la densité spectrale -- dans le terme de Nozières de (12). Il nous faut donc chercher les solutions $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ de partie imaginaire < 0 de l'équation

$$M_{--\downarrow[\text{III}]}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) = 0 \quad (34)$$

avec

$$M_{--\downarrow[\text{III}]}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - (2\pi)^{-3} 2i\pi \rho_{--}^{(0)[\text{III}]}(\bar{z}, \bar{q}) \quad (35)$$

3.4.1. Résultats numériques

La résolution numérique de l'équation (34) est une simple formalité, si l'on utilise un certain logiciel de calcul formel, dans lequel l'intégration numérique, l'évaluation des intégrales elliptiques et la recherche de racines d'une fonction de la variable complexe ont été préprogrammées. Le résultat est présenté en trait plein sur la figure 2a pour la partie réelle et sur la figure 2b pour la partie imaginaire de la branche du continuum. En fonction du nombre d'onde réduit \bar{q} , la partie imaginaire est monotone décroissante et semble tendre asymptotiquement vers $-\infty$. La partie réelle a une structure plus intéressante : partant de 2^+ (ce qui correspond à l'énergie propre non réduite attendue $2\Delta^+$),⁶ elle passe par un maximum $\text{Re } \bar{z} \approx 2,158$ en $\bar{q} \approx 3,403$ avant de décroître et, semble-t-il, tendre vers zéro à l'infini.

Nous sommes partis aussi à la recherche d'une branche du continuum de type III, en prolongeant l'équation aux énergies propres du demi-plan complexe supérieur au demi-plan inférieur en passant par l'intervalle en énergie $[(4 + \bar{q}^2)^{1/2}, +\infty[$. Il faut pour cela remplacer $\rho_{--}^{(0)[\text{III}]}$ par $\rho_{--}^{(0)[\text{III}]}$ dans (34,35), où les notations sont celles de la table 1. Nous n'avons trouvé cependant aucune solution. Il semble en effet que $\text{Im } M_{--\downarrow[\text{III}]}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) < 0$ sur tout l'intérieur du quatrième quadrant du plan complexe ($\text{Re } \bar{z} > 0$ et $\text{Im } \bar{z} < 0$), pour tout \bar{q} .⁷

3.4.2. Résultats analytiques à faible \bar{q}

Pour déterminer analytiquement le comportement de la branche du continuum à faible nombre d'onde réduit, nous paramétrons son énergie propre comme dans la référence [3], c'est-à-dire que nous posons

$$\bar{z} = 2 + \frac{\zeta}{4} \bar{q}^2 \quad (36)$$

dans la fonction (35) puis nous faisons tendre \bar{q} vers zéro à coefficient ζ fixé dans le demi-plan complexe inférieur. De la forme intégrale (31) et de l'expression de la densité spectrale -- dans la table 1, nous tirons⁸

$$M_{--\downarrow[\text{III}]}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\overset{\zeta \text{ fixé, } \text{Im } \zeta < 0}{\sim}} \frac{4\pi m k_0}{(2\pi)^3 \hbar^2} \left\{ \frac{\pi}{8} \bar{q} \left(\sqrt{\zeta - 1} + \zeta \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} - \pi \zeta \right) + \bar{q}^2 \left(\frac{\zeta}{4} - \frac{1}{12} \right) + \frac{i\pi \bar{q}^3}{256} \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta^2 - (5\zeta - 2) \sqrt{\zeta - 1} \right] \right\} + O(\bar{q}^4) \quad (37)$$

où la flèche rappelle que le prolongement analytique a été fait. Il reste à remplacer ζ par un développement limité en puissances de \bar{q} , dont on détermine les coefficients successifs en annulant le second membre de (37) ordre par ordre.

6. Nous écrivons 2^+ car le mode collectif du continuum disparaît en $q = 0$, voir [3] et les références citées.

7. Nous l'avons vérifié analytiquement aux bords du domaine, à l'infini ($|\bar{z}| \rightarrow +\infty$ à phase fixée) et pour $\bar{q} \rightarrow +\infty$ à \bar{z} ou à \bar{z}/\bar{q} fixé.

8. Dans (31), on effectue d'abord le changement de variable $\bar{z} = 2 \text{ch } \Omega$. On distingue ensuite les intervalles $\Omega \in [0, A\bar{q}/2]$ et $\Omega \in [A\bar{q}/2, +\infty[$, où $A \gg 1$ est arbitraire. Sur le premier intervalle, on fait le changement de variable $\Omega = x\bar{q}/2$ puis on développe l'intégrande en puissances de \bar{q} à x fixé, en séparant les cas $x < 1$ et $x > 1$. Sur le second intervalle, on développe l'intégrande en puissances de \bar{q} à Ω fixé. Dans le résultat final, on regroupe les termes ordre par ordre en \bar{q} et l'on fait tendre A vers $+\infty$ dans les coefficients. Il reste à calculer quelques intégrales de la forme $\int dx \sqrt{x^2 - 1} x / (x^2 - \zeta)^n$ ou $\int dx \text{asin}(1/x) x / (x^2 - \zeta)^n$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Par exemple, $\int_1^{+\infty} dx \text{asin}(1/x) x / (x^2 - \zeta) = -(\pi/4) \ln(1 - 1/\zeta) - (i\pi/2) \text{asin}(1/\sqrt{\zeta})$ ($\text{Im } \zeta < 0$) sachant que $\text{asin } z = -i \ln(\sqrt{1 - z^2} + iz)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1 - \infty, -1[\cup]1, +\infty\}$.

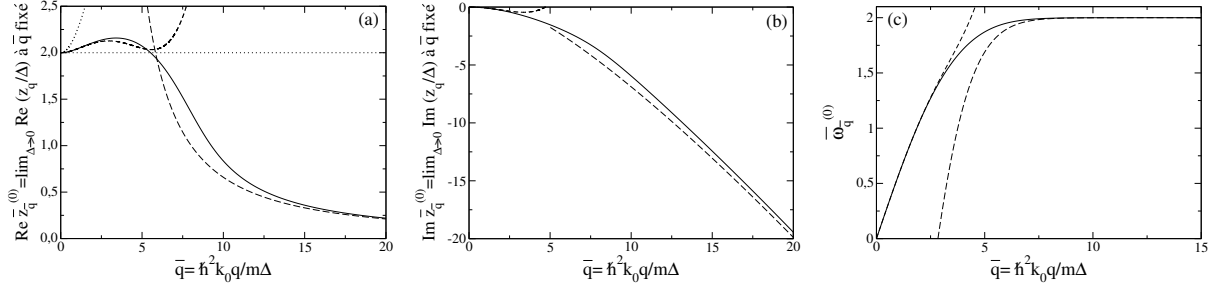


FIGURE 2: Dans la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0$, partie réelle (a) et partie imaginaire (b) de l'énergie propre complexe z_q de la branche du continuum, c'est-à-dire du mode de module, d'un gaz de fermions de spin 1/2 non polarisé, en fonction du nombre d'onde q . L'adimensionnement de q et de z_q en \bar{q} et \bar{z}_q selon l'équation (14) assure que \bar{z}_q admet une limite finie et non nulle $\bar{z}_q^{(0)}$ lorsque $\Delta/\mu \rightarrow 0$ à \bar{q} fixé. Trait plein : calcul numérique de la racine de la fonction (35) dans le demi-plan complexe inférieur. Tireté court : développement limité (38) d'ordre 4 à faible \bar{q} . Tireté long : développement asymptotique (43) à grand \bar{q} , limité à l'ordre dominant \bar{q} pour la partie imaginaire et $1/\bar{q}$ pour la partie réelle. Pointillés dans (a) : bornes inférieure $\bar{\epsilon}_1^{(0)}(\bar{q}) = 2$ et supérieure $\bar{\epsilon}_2^{(0)}(\bar{q}) = (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$ de l'intervalle d'énergie par lequel on est passé pour prolonger analytiquement au demi-plan inférieur l'équation sur $\bar{z}_q^{(0)}$ dans (35); c'est aussi la fenêtre d'observabilité directe du mode dans les fonctions de réponse du gaz [3]. Ces résultats valent à température nulle pour une interaction de contact dans l'onde s , comme dans les superfluides de particules neutres, à laquelle peut s'ajouter l'interaction de Coulomb, comme dans les supraconducteurs purement électroniques BCS. On donne en (c) la branche acoustique, c'est-à-dire la relation de dispersion du mode de phase, dans un superfluide de fermions nécessairement neutres, obtenue en résolvant numériquement la seconde équation dans (23) à l'ordre 0 en la constante de couplage g , c'est-à-dire l'équation $M_{++}^{(0)}(\bar{\omega}_q^{(0)}, \bar{q}) = 0$ d'inconnue $\bar{\omega}_q^{(0)} \in [0, 2[$; aucun prolongement analytique n'est requis. Les tiretés court et long correspondent aux approximations à faible et à grand \bar{q} dans (47). Ici, la position du minimum de la relation de dispersion BCS ϵ_k vaut $k_0 = k_F$, le nombre d'onde de Fermi du gaz.

Le résultat,

$$\bar{z}_q^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{1}{4} \bar{q}^2 \left[\zeta_0 + \zeta_1 \bar{q} + \zeta_2 \bar{q}^2 + O(\bar{q}^3) \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta_0 = \sqrt{\zeta_0 - 1} / (\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}) \simeq 0,236\,883 - 0,295\,632\,i \\ \zeta_1 = 2i\zeta_0(1 - 3\zeta_0) / (3\pi\sqrt{\zeta_0 - 1}) \simeq -0,081\,630 - 0,014\,462\,i \\ \zeta_2 = \frac{\zeta_0^2(1 - 3\zeta_0)(\zeta_0 - 11/9)}{\pi^2(\zeta_0 - 1)^2} + \frac{\zeta_0(1 - 2\zeta_0)}{16} \simeq 0,007\,158 + 0,016\,367\,i \end{cases} \quad (38)$$

représenté en tireté court sur les figures 2a et 2b, rend compte qualitativement de l'existence d'un maximum sur la partie réelle de la branche. La valeur de ζ_0 figurait déjà dans les références [2] et [3]. Il est intéressant de noter que le développement (38) admet un terme cubique non nul, au contraire de la branche acoustique, voir la référence [21] et notre équation (47) à venir dont elle est tirée.

3.4.3. Résultats analytiques à grand \bar{q}

Pour déterminer analytiquement le comportement de la branche du continuum à grand nombre d'onde réduit, nous postulons une divergence quasi-linéaire de $\bar{z}_q^{(0)}$ (en fait seulement de sa partie imaginaire, voir plus bas). Nous posons donc

$$\bar{z} = \mathcal{Z}\bar{q} \quad (39)$$

dans la fonction (35) et faisons tendre \bar{q} vers l'infini à coefficient \mathcal{Z} fixé dans le demi-plan complexe inférieur. De la forme intégrale (31) et de l'expression de la densité spectrale -- dans la table 1, nous tirons le développement asymptotique⁹

$$M_{--\downarrow\uparrow\uparrow}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{\overset{\mathcal{Z} \text{ fixé, } \text{Im } \mathcal{Z} < 0}{=}} \frac{4\pi m k_0}{(2\pi)^3 \hbar^2} \left[\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q}) + \frac{1}{\bar{q}^2} \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q}) + o\left(\frac{1}{\bar{q}^2}\right) \right] \quad (40)$$

9. On commence par supposer que $\text{Im } \mathcal{Z} > 0$. Dans l'expression intégrale (31), on effectue le changement de variable $\bar{\epsilon} = \bar{q}x$ puis on développe l'intégrande en puissances de $1/\bar{q}$ à x fixé, en distinguant les cas $x < 1$ et $x > 1$. Dans le premier cas, $\rho_{-}^{(0)}(\bar{q}x, \bar{q}) = \frac{2\pi m k_0}{\hbar^2} \left[x - \frac{1}{\bar{q}^2 x} \ln(4e\bar{q}^2 x^2) + o(1/\bar{q}^2) \right]$; dans le second, $\rho_{-}^{(0)}(\bar{q}x, \bar{q}) = \frac{2\pi m k_0}{\hbar^2} \left[1 + \frac{1}{\bar{q}^2 x} \ln \frac{x-1}{x+1} + o(1/\bar{q}^2) \right]$; ces développements sont tirés de la forme (30), en distinguant lorsque

avec, chose remarquable, des coefficients dépendant lentement (logarithmiquement) de \bar{q} :

$$\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q}) = \ln\left(\frac{2\bar{q}}{e}\right) - \frac{i\pi\mathcal{Z}}{2} + \frac{1-\mathcal{Z}}{2} \ln \frac{1-\mathcal{Z}}{2} + \frac{1+\mathcal{Z}}{2} \ln \frac{1+\mathcal{Z}}{2} \quad (41)$$

$$\mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q}) = \frac{1}{2\mathcal{Z}} \left[g_2\left(\frac{\mathcal{Z}-1}{\mathcal{Z}+1}\right) - g_2\left(\frac{\mathcal{Z}+1}{\mathcal{Z}-1}\right) - \ln(4e\bar{q}^2) \left(\ln \frac{1+\mathcal{Z}}{2} - \ln \frac{1-\mathcal{Z}}{2} - i\pi \right) + 2g_2\left(\frac{1}{\mathcal{Z}}\right) - 2g_2\left(-\frac{1}{\mathcal{Z}}\right) + 4i\pi \ln \mathcal{Z} \right] \quad (42)$$

où $g_\alpha(z)$ est une fonction de Bose ou polylogarithme. De l'annulation du second membre de (40) ordre par ordre en \bar{q} , nous déduisons donc un développement asymptotique

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{Z}_0 \bar{q} + \frac{\mathcal{Z}_2}{\bar{q}} + o\left(\frac{1}{\bar{q}}\right) \quad (43)$$

dont les coefficients dépendent eux aussi logarithmiquement de \bar{q} . Comme on pouvait s'y attendre au vu des figures 2a et 2b, le coefficient du terme dominant est imaginaire pur :

$$\mathcal{Z}_0 = -iY_0 \quad \text{avec} \quad \ln\left(\bar{q} \sqrt{1+Y_0^2}/e\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0\right) Y_0 \quad (44)$$

Nous ne savons pas résoudre l'équation transcendante sur la partie imaginaire $Y_0 > 0$ autrement que numériquement.¹⁰ La prédiction correspondante est représentée en tireté long sur la figure 2b. Du terme sous-dominant, c'est la partie réelle qui est la plus intéressante physiquement, car elle fournit un équivalent de la partie réelle de la branche du continuum. Coup de chance, c'est aussi la moins compliquée des deux à écrire, puisque seule la partie imaginaire de $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q})$ prend une forme simple sur l'axe imaginaire pur :

$$\text{Im } \mathcal{M}_2(-iY, \bar{q}) = \frac{\pi^2}{Y} \quad \forall Y > 0 \quad \text{donc} \quad \text{Re } \mathcal{Z}_2 = \frac{\pi^2}{\left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0\right) Y_0} \quad (45)$$

Le résultat, tendant vers zéro comme $1/\bar{q}$ à un facteur logarithmique près, est représenté en tireté long sur la figure 2a.

3.5. Branche acoustique pour une interaction de contact à la limite $g \rightarrow 0$

On le sait, notre gaz de fermions neutres admet une branche d'excitation acoustique $q \mapsto \hbar\omega_{\mathbf{q}}$, purement réelle dans le formalisme BCS linéarisé dépendant du temps utilisé ici, et amplement étudiée dans la référence [1]. Nous jugeons utile cependant de donner quelques résultats complémentaires dans la limite de couplage faible, où elle s'adimensionne comme la branche du continuum :

$$\frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{\Delta} \underset{\Delta \rightarrow 0}{\xrightarrow{\bar{q} \text{ fixé}}} \bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} \quad (46)$$

et où elle résout la seconde équation de (23). Pour simplifier, négligeons dans cette dernière les petites corrections proportionnelles à la constante de couplage effective g . Alors $\bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)}$ est racine de $\bar{z} \mapsto M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$, sans nul besoin de prolongement analytique (contrairement au cas à température non nulle, où la ligne de coupure sur l'équation aux énergies propres atteint l'énergie nulle, et où l'on trouve jusqu'à quatre branches acoustiques complexes [22, 23]). Par résolution numérique, nous traçons la branche acoustique sur la figure 2c : après un départ linéaire en le nombre d'onde réduit, elle sature rapidement (plus rapidement qu'une loi de puissance) à la valeur réduite 2, c'est-à-dire

¹⁰ $x < 1$ les intervalles $u \in [0, x - A/\bar{q}^2]$ et $u \in [x - A/\bar{q}^2, (x^2 - 4/\bar{q}^2)^{1/2}]$ où $A \rightarrow +\infty$ après développement en $1/\bar{q}$. On tombe sur les intégrales $I = \int_0^1 dx \frac{\ln x}{x-z} = g_2(1/z)$ et $J = \int_1^{+\infty} dx \ln[(x-1)/(x+1)]/(x-z) = g_2((z+1)/(z-1)) - g_2(1)$ (on a effectué dans J le changement de variable $X = (x-1)/(x+1) \in [0, 1]$ puis on a décomposé en éléments simples). Le résultat final est prolongé analytiquement de $\text{Im } \mathcal{Z} > 0$ à $\text{Im } \mathcal{Z} < 0$ à travers $[0, 1]$ par la substitution $g_2(1/\mathcal{Z}) \rightarrow g_2(1/\mathcal{Z}) + 2i\pi \ln \mathcal{Z}$, alors que $g_2(-1/\mathcal{Z})$, $g_2((\mathcal{Z}-1)/(\mathcal{Z}+1))$ et $g_2((\mathcal{Z}+1)/(\mathcal{Z}-1))$ restent inchangés puisque $g_2(z)$ admet $[1, +\infty[$ comme ligne de coupure ; de même, les fonctions $\ln(1 \pm \mathcal{Z})$, qu'on a pris soin de faire apparaître, restent inchangées.

10. En commettant une erreur relative $O(1/Y_0^3)$ sur Y_0 , on peut remplacer l'équation par $\pi Y_0 = \ln(\bar{q} Y_0)$ dont la solution est $Y_0 = (-1/\pi)W_{-1}(-\pi/\bar{q})$ où W_{-1} est la branche secondaire de la fonction de Lambert W .

à l'énergie 2Δ du bord inférieur du continuum de paire brisée. Sur la même figure sont représentées en tireté les prédictions analytiques

$$\bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} = \frac{\bar{q}}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{\bar{q}^2}{45} + \frac{17\bar{q}^4}{28350} + O(\bar{q}^6) \right] \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} - 2 \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{\sim} -16e^{-2} \exp[-(2\bar{q}/\pi) \ln(\bar{q}/e)] \quad (47)$$

Celle à faible \bar{q} est tirée de la référence [21]. Celle à grand \bar{q} est originale : nous la déduisons de la forme intégrale (33) de $M_{++}^{(0)}$.¹¹

4. Régime d'interaction quelconque : le cas des atomes froids dans le raccordement CBE-BCS

Dans un gaz d'atomes froids, les fermions de spins opposés sont sujets à des interactions de van der Waals à courte portée, de longueur de diffusion a virtuellement ajustable entre $-\infty$ et $+\infty$ par résonance de Feshbach. Dans le cas $a < 0$, cependant, les gaz sont toujours préparés dans le régime d'interaction forte $1 \lesssim k_F|a|$, qui seul assure une température critique de superfluidité réduite T_c/T_F pas trop faible donc accessible (on ne sait guère refroidir ces gaz de manière contrôlée en dessous de $T = 0,05T_F$, où T_F est la température de Fermi [9, 24]). Ceci contraste avec la limite d'interaction faible $k_F|a| \ll 1$ de la section 3. L'état fondamental du gaz reste qualitativement le même, c'est-à-dire un condensat de paires $\uparrow\downarrow$ liées par le mécanisme de Cooper en présence de mers de Fermi, mais la théorie BCS devient moins quantitative. De plus, sous peine d'avoir de fortes pertes à trois corps, les expériences ne sortent pas du régime dilué $k_F b \ll 1$, où b est la portée des interactions¹²; cette condition, jointe à $1 \lesssim k_F|a|$, impose désormais que $|a| \gg b$: l'interaction devient résonnante dans l'onde s . Dans le cas $a > 0$, il existe pour $b \lesssim a$ un dimère $\uparrow\downarrow$ de diamètre caractéristique a dans l'espace libre et les paires liées peuvent se former indépendamment de l'existence de mers de Fermi ; à suffisamment faible densité, la distance moyenne entre fermions est $\gg a$ et l'état fondamental du gaz tend vers un condensat de Bose-Einstein (CBE) de dimères. Même dans ce cas, les expériences se limitent au régime résonnant $a \gg b$, sinon le gaz de dimères aurait une courte durée de vie sous l'effet des pertes à trois corps.¹³ En pratique, les études expérimentales se concentrent sur le raccordement entre les deux cas limites BCS $k_F a \rightarrow 0^-$ et CBE $k_F a \rightarrow 0^+$, dans l'intervalle de croisement $-1 \lesssim 1/k_F a \lesssim 1$ rendu non trivial par la force des interactions et rendu universel par la condition partout satisfaite $|a| \gg b$ [26, 27, 28].

Dans notre modèle, la portée de l'interaction est représentée par le pas b du réseau cubique. La condition de diffusion résonnante $|a| \gg b$ (sachant qu'on a toujours $k_F b \ll 1$) nous autorise donc à prendre la limite continue $b \rightarrow 0$, ce qui amène quelques simplifications bienvenues (section 4.1). Les densités spectrales qui en résultent peuvent être calculées analytiquement (section 4.2). Après avoir présenté des observables du mode du continuum complémentaires de sa relation de dispersion (section 4.3), nous effectuons une étude numérique (section 4.4), puis une étude analytique fouillée en distinguant la limite des faibles nombres d'onde (section 4.5), celle d'un faible paramètre d'ordre $\Delta/\mu \ll 1$ (section 4.6) et celle d'un potentiel chimique faible et positif $\Delta/\mu \gg 1$ (section 4.7). Tous ces résultats sur la branche du continuum sont obtenus pour $\mu > 0$, où le spectre d'excitation BCS $\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ atteint son minimum en le nombre d'onde non nul $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, et par prolongement analytique de l'équation aux énergies propres par la fenêtre naturelle que délimitent ses deux premiers points de branchement $\epsilon_1(q)$ et $\epsilon_2(q)$, ce qui impose $0 < q < 2k_0$ [3]. Nous généralisons cependant l'étude dans la section 4.8 en effectuant un prolongement analytique par les autres fenêtres (d'énergie supérieure à $\epsilon_2(q)$) et en considérant le cas $\mu < 0$ où le spectre BCS est minimal en $k = 0$.

4.1. La limite continue ou de portée nulle $b \rightarrow 0$

Faisons tendre vers zéro le pas b du modèle sur réseau à longueur de diffusion a fixée. On peut d'abord remplacer la première zone de Brillouin \mathcal{D} par \mathbb{R}^3 dans les intégrales Σ de (8); elles ont été construites pour avoir dans cette limite une valeur finie et non nulle. On remarque ensuite, sur son expression donnée au début de la section 2, que la

11. Il a fallu pour cela venir à bout d'une intégrale non triviale, $\int_0^1 dx \frac{E(x)-E(0)-x^2[E(1)-E(0)]}{x(1-x^2)^{3/2}} = \int_0^1 du \frac{E(u)-E(1)}{u^2} + \int_0^1 du \frac{E(u)-E(0)}{1-u^2} = 1 + \frac{\pi}{2}(\ln 2 - 1)$ où l'on a effectué le changement de variable $x = u'$, avec la notation $u' = (1 - u^2)^{1/2}$ comme dans §8.111 de la référence [20].

12. Nous nous limitons ici, comme dans la plupart des expériences, à une résonance de Feshbach magnétique large, où la portée vraie b et la portée effective r_e sont de l'ordre de la longueur de van der Waals $\ell = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$, au contraire des résonances étroites pour lesquelles $-r_e \gg b \approx \ell$.

13. Le taux de collision élastique deviendrait plus faible que le taux inélastique, ce qui compromettrait le refroidissement par évaporation [25].

constante de couplage sur site g_0 tend vers zéro. On peut donc remplacer g_0 par zéro dans la troisième colonne de la matrice M de l'équation (7), ce qui simplifie grandement l'écriture du déterminant de M dans l'équation aux énergies propres (11) :

$$\det M(z, \mathbf{q}) = M_{++}(z, \mathbf{q})M_{--}(z, \mathbf{q}) - [M_{+-}(z, \mathbf{q})]^2 \quad (48)$$

où M_{ss} sont les éléments diagonaux et $M_{+-} = M_{-+}$ les éléments non diagonaux du bloc 2×2 supérieur gauche de M .¹⁴ Pour la même raison, l'inverse M^{-1} apparaissant dans la dépendance en temps (6) des variables collectives se simplifie : les petits écarts à l'équilibre en phase et en module du paramètre d'ordre ne dépendent plus que des deux premières composantes du vecteur source de (6), ce qui permet, sans prendre trop de place, d'en donner l'écriture parlante faisant apparaître le déterminant de M au dénominateur :

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) - \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) + \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \end{pmatrix} = \int_{i\eta+\infty}^{i\eta-\infty} \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-izt/\hbar}}{\det M(z, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} M_{--}(z, \mathbf{q}) & -M_{+-}(z, \mathbf{q}) \\ -M_{+-}(z, \mathbf{q}) & M_{++}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{W^+y^-}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^+y^+}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^-y^-}^\epsilon(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (49)$$

En revanche, le petit écart en densité $\delta\rho_{\mathbf{q}}(t)$ dépend des trois composantes du vecteur source et fait intervenir d'autres éléments de matrice de M que ceux de (48); pour alléger, nous ne l'étudierons donc pas ici, bien qu'il soit plus directement mesurable que les écarts sur le paramètre d'ordre.

Pour les études numériques et analytiques à venir, il convient d'exprimer les éléments de matrice utiles de M en termes des densités spectrales (13) correspondantes, ces dernières étant de toute façon requises par le prolongement analytique à la Nozières (12). C'est tout de suite fait dans le cas de M_{+-} : il suffit d'insérer dans l'intégrande (8) de $\Sigma_{W^+W^-}^z$ l'intégrale de $\delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ sur toutes les énergies $\epsilon \geq 2\Delta$, qui vaut visiblement un, puis d'échanger l'intégration sur le vecteur d'onde \mathbf{k} et sur ϵ pour faire apparaître la densité spectrale ρ_{+-} comme dans (13). On obtient

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \rho_{+-}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} + \frac{1}{z + \epsilon} \right) \quad (50)$$

Le cas des éléments diagonaux M_{ss} , $s = \pm$, est rendu plus délicat par la nécessaire présence du contre-terme $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$; avant d'appliquer la même procédure que pour M_{+-} , on introduit donc une coupure A arbitrairement grande sur l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ d'une paire brisée, au moyen d'un facteur $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ (Θ est la fonction de Heaviside), puis on sépare le contre-terme du reste. Dans le reste, on utilise une astuce moins-plus, tirant parti du fait que les densités spectrales $\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q})$ sont équivalentes à haute énergie à $\rho_{\infty}(\epsilon) = \pi(m/\hbar^2)^{3/2} \epsilon^{1/2}$, proportionnelle à la densité d'états d'une particule libre de masse $m/2$.¹⁵ Il vient finalement :

$$M_{ss}(z, \mathbf{q}) = \frac{C(\Delta)}{(2\pi)^3} + (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} - \frac{1}{z + \epsilon} \right) + \frac{2}{\epsilon} \rho_{\infty}(\epsilon) \right], \quad \forall s \in \{+, -\} \quad (51)$$

Dans la scorie de régularisation

$$C(\Delta) = 4\rho_{\infty}(2\Delta) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}} - \frac{2m}{\hbar^2 k^2} \right) = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \Delta^{1/2} [1 + I_1(\mu/\Delta)] \quad (52)$$

apparaît une intégrale sur \mathbf{k} déjà calculée analytiquement dans [19], voir la fonction $I_1(\mu/\Delta)$ de cette référence, mais dont nous donnons ici, par paramétrage hyperbolique, l'expression plus compacte $I_1(\text{sh } \tau) = \text{ch } \tau (2e^\tau)^{1/2} K(\text{ie}^\tau) - (2e^{-\tau})^{1/2} E(\text{ie}^\tau)$, où E et K sont les intégrales elliptiques complètes de seconde et première espèce comme dans §8.112

14. L'équation (48) figure déjà dans [1]. Elle est aussi équivalente, compte tenu des identités (25), à la limite de température nulle de l'équation (2.6) de [2], si ce n'est que cette référence approxime le potentiel chimique μ par l'énergie de Fermi ϵ_F dans la relation de dispersion BCS.

15. Asymptotiquement, l'introduction du facteur $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ revient à mettre une coupure sur le nombre d'onde k ou sur l'énergie cinétique $E_{\mathbf{k}}$ puisque $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = 2E_{\mathbf{k}} + O(1)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Comme les poids $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^z$ tendent vers 1 dans cette limite, avec un écart $O(1/k^4)$, on en déduit que $\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q}) \sim \rho_{\infty}(\epsilon)$ comme annoncé. Dans l'intégrale sur ϵ encore coupée à A par le facteur $\Theta(A - \epsilon)$, on soustrait à l'intégrande son équivalent $(-2/\epsilon)\rho_{\infty}(\epsilon)$, ce qui permet de passer à la limite $A \rightarrow +\infty$; l'intégrale du bout restant $\int_{2\Delta}^A d\epsilon (-2/\epsilon)\rho_{\infty}(\epsilon)$ est facile à calculer. Dans l'intégrale sur \mathbf{k} du contre-terme, encore coupée par $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$, on soustrait de même à $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$ son équivalent $1/2E_{\mathbf{k}}$, ce qui permet de passer à la limite $A \rightarrow +\infty$; l'intégrale du bout restant $\int d^3k \Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})/2E_{\mathbf{k}}$ se calcule aisément à la limite des grands A puisqu'on peut y remplacer $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ par $2E_{\mathbf{k}}$.

de la référence [20]. Pour être complets, signalons qu'une forme plus belle, sans scorie de régularisation mais avec un contre-terme plus élaboré, se déduit aisément des identités¹⁶

$$M_{++}(0, \mathbf{0}) = M_{--}(2\Delta, \mathbf{0}) = 0 \quad (53)$$

Il suffit de soustraire à (51) avec $s = +$ sa valeur pour $(z = 0, \mathbf{q} = \mathbf{0})$, qui est nulle, et à (51) avec $s = -$ sa valeur pour $(z = 2\Delta, \mathbf{q} = \mathbf{0})$, nulle aussi, pour obtenir

$$M_{++}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{++}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} - \frac{1}{z + \epsilon} \right) + \frac{2}{\epsilon} \rho_{++}(\epsilon, \mathbf{0}) \right] \quad (54)$$

$$M_{--}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z - \epsilon} - \frac{1}{z + \epsilon} \right) - \rho_{--}(\epsilon, \mathbf{0}) \left(\frac{1}{2\Delta - \epsilon} - \frac{1}{2\Delta + \epsilon} \right) \right] \quad (55)$$

Les densités spectrales ont une expression analytique simple à vecteur d'onde nul,¹⁷ mais nettement moins simple à \mathbf{q} non nul comme il apparaîtra dans la section suivante 4.2.

4.2. Calcul analytique des densités spectrales

4.2.1. Les points de non-analyticité $\epsilon_1(q)$, $\epsilon_2(q)$ et $\epsilon_3(q)$

Pour effectuer le prolongement analytique des éléments de matrice $M_{ss'}(z, \mathbf{q})$ comme dans (12), il faut d'abord trouver les points de non-analyticité en ϵ des densités spectrales correspondantes $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ sur l'axe réel. Ce travail a été effectué qualitativement dans la référence [3] et l'origine physique de ces points a été expliquée. Nous en donnons donc ici une discussion purement quantitative.

Commençons par le cas le plus riche, $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, avec $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ ici, qui présente deux ou trois points de non-analyticité. Les points extrêmes sont donnés par

$$\epsilon_1(q) = 2\Delta \quad \text{et} \quad \epsilon_3(q) = 2\epsilon_{q/2} = 2 \left[\left(\frac{\hbar^2 q^2}{8m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} \quad (56)$$

où $\epsilon_1(q)$ est simplement le bord inférieur du continuum de paire brisée [1, 29]; leur expression figurait dans [3]. Notons que $\epsilon_3(q)$ fusionne avec $\epsilon_1(q)$ en $q = 2k_0$, bord supérieur de l'intervalle en q considéré. Introduisons maintenant le nombre d'onde q_0 , fonction de la force de l'interaction mais toujours situé dans l'intervalle $[0, 2k_0]$:

$$\frac{1}{4} \check{q}_0^2 = 1 + \check{\Delta}^{2/3} \left[\left(1 + \check{\Delta}^2 \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/3} - \check{\Delta}^{2/3} \left[\left(1 + \check{\Delta}^2 \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/3} \quad (57)$$

où nous avons cru bon, pour alléger l'écriture, d'exprimer q_0 en unités de k_0 et le paramètre d'ordre Δ (ici largeur de la bande interdite BCS) en unités de μ . Cet adimensionnement, repéré par un accent tchèque, revient à poser $\hbar = 2m = k_0 = 1$ et pourra être appliqué à tout nombre d'onde q et toute énergie ϵ , comme suit :

$$\check{q} = \frac{q}{k_0} \quad \text{et} \quad \check{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\mu} \quad \text{avec} \quad k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar \quad \text{ici} \quad (58)$$

Alors, pour tout $q \in]0, q_0[$, il existe un point de non-analyticité médian $\epsilon_2(q)$, compris donc strictement entre $\epsilon_1(q)$ et $\epsilon_3(q)$, donné après adimensionnement par la plus grande racine réelle du polynôme de degré huit :

$$P_8(X) \equiv [X^2 - \check{q}^2(2 + \check{q})^2][X^2 - \check{q}^2(2 - \check{q})^2] - 4\check{\Delta}^2[X^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)] \{ [X^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)]^2 - 36\check{q}^4 X^2 \} - 432\check{\Delta}^4 \check{q}^4 X^2 \quad (59)$$

L'expression (57) de \check{q}_0 et celle (59) du polynôme $P_8(X)$ seront justifiées dans la section 4.2.2. En $q = q_0$, ce point médian disparaît par fusion avec $\epsilon_3(q)$. Pour $q \in]q_0, 2k_0[$, il ne reste plus que les deux points (56), mais nous poserons

16. On les établit par substitution directe dans les formes intégrales (8) : compte tenu de (10) et de $\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2$, l'intégrande est identiquement nul.

17. Limitons-nous pour abrégier au cas $\mu > 0$ et introduisons les intermédiaires $\rho_{\pm}(\epsilon) = (\pi/2)(2m/\hbar^2)^{3/2} [\mu \pm (\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}/2]^{1/2}$, avec $\rho_+(\epsilon)$ de support $[2\Delta, +\infty[$ et $\rho_-(\epsilon)$ de support $[2\Delta, 2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2}]$ (toute fonction est par définition nulle en dehors de son support). Alors $\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{0}) = [\rho_+(\epsilon) + \rho_-(\epsilon)](\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}/\epsilon$, $\rho_{++}(\epsilon, \mathbf{0}) = [\rho_+(\epsilon) + \rho_-(\epsilon)]\epsilon/(\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}$ et $\rho_{+-}(\epsilon, \mathbf{0}) = \rho_+(\epsilon) - \rho_-(\epsilon)$.

cependant $\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$ dans la suite pour alléger l'écriture.¹⁸ Cette discussion des points de non-analyticité est illustrée et résumée sur les figures 3a et 3b. Nous la complétons par quelques résultats analytiques. D'abord, comme on le voit sur la figure 3b, \check{q}_0 admet les comportements limites suivants à faible couplage $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ et près du point d'annulation $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ du potentiel chimique :

$$\check{q}_0 \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{=} 2 - 2^{1/3} \check{\Delta}^{2/3} + O(\check{\Delta}^{4/3}) \quad \text{et} \quad \check{q}_0 \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} + O(\check{\Delta}^{-2}) \quad (60)$$

et reste toujours supérieur à $2/\sqrt{3}$ donc à 1. Ensuite, comme on le voit sur la figure 3a, $\epsilon_2(q)$ présente, en fonction de q , un maximum absolu en $q = k_0$, autour duquel on dispose du développement limité :

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 1}{=} \check{\Delta} + (1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - \frac{(\check{q} - 1)^2}{(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - \check{\Delta}/2} + O(\check{q} - 1)^3 \quad (61)$$

En $q = 0$, $\epsilon_2(q)$ rejoint quadratiquement le point de non-analyticité $\epsilon_1(q)$, comme l'écrivait déjà la référence [3] :

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} 2\check{\Delta} + \check{q}^2/\check{\Delta} + O(\check{q}^4) \quad (62)$$

Enfin, dans les limites de grand et de faible Δ/μ prises à q/k_0 fixé, on dispose des expressions simples

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q} < \check{q}_0(\infty) = 2/\sqrt{3}}{=}} 2\check{\Delta} + \frac{\check{q}^2(2 - \check{q}^2)}{2\check{\Delta}} + O(1/\check{\Delta}^3) \quad \text{et} \quad \check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0^+}{\overset{\check{q} \text{ fixé} \in]0,2[}{=}} \check{q}(2 - \check{q}) + \check{\Delta} \check{q}^{1/2} (2 - \check{q})^{1/2} + \check{\Delta}^2 \frac{1 + \check{q}^2}{4\check{q}} + O(\check{\Delta}^3) \quad (63)$$

Précisons la nature des singularités des densités spectrales en les énergies ϵ_i . $\epsilon_2(q)$ et $\epsilon_3(q)$ sont des points anguleux pour les trois densités spectrales ρ_{++} , ρ_{--} et ρ_{+-} . $\epsilon_1(q)$ est un point de discontinuité pour ρ_{++} et un point anguleux pour ρ_{--} , voir (74), mais n'est rien pour la densité spectrale ρ_{+-} qui reste nulle aux énergies positives jusqu'à $\epsilon = \epsilon_2(q)$.

Terminons par les cas les plus pauvres : lorsque $\mu > 0$ mais $q > 2k_0$, ou lorsque $\mu < 0$ (la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$ est alors minimale en $k = 0$) mais q quelconque, il ne reste plus qu'un seul point de non-analyticité des densités spectrales sur l'axe réel, à savoir $\epsilon = \epsilon_3(q)$ [3], qui n'est autre que le bord inférieur du continuum de paire brisée au nombre d'onde q [1, 29].¹⁹

4.2.2. Expressions des densités spectrales

Dans la limite continue du modèle sur réseau, les densités spectrales (13) peuvent être exprimées analytiquement en termes d'intégrales elliptiques. Cette percée calculatoire va beaucoup simplifier les études numériques et analytiques qui suivent; en particulier, elle permet d'effectuer immédiatement le prolongement analytique des densités spectrales aux énergies z complexes comme le requiert la procédure (12), puisque les propriétés des intégrales elliptiques dans le plan complexe sont connues.²⁰ Nous donnons ici les expressions des densités spectrales dans le cas le plus intéressant $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, voir la table 2. Pour rendre l'écriture compacte, nous avons adimensionné l'énergie ϵ et le nombre d'onde q comme dans (58), les densités spectrales comme suit :

$$\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q}) = \frac{2mk_0}{\hbar^2} \check{\rho}_{ss'}(\check{\epsilon}, \check{q}) \quad (64)$$

puis nous avons introduit aux énergies $\epsilon \geq 2\Delta$ les changements de variable hyperboliques ($\Omega \geq 0$),

$$\text{ch } \Omega = \frac{\check{\epsilon}}{2\check{\Delta}}, \quad \text{sh } \Omega = \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}{2\check{\Delta}} \quad \text{et} \quad \text{th } \Omega = \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}{\check{\epsilon}} \quad (65)$$

18. La fonction « plus grande racine réelle de $P_8(X)$ » continue bien entendu à exister pour $q > q_0$; elle vient tangenter la fonction $\epsilon_3(q)$ en $q = q_0$ (même dérivée première mais pas seconde) et lui redevient strictement inférieure au-delà. Notons que $\epsilon_3(q)$ admet un point d'inflexion en $q = q_0$, $d^2\epsilon_3(q = q_0)/dq^2 = 0$, ce que prédit la méthode de la référence [3] : la première fonction $k \mapsto \epsilon_{k+q/2} + \epsilon_{|k-q/2|}$ introduite dans la note 19 à venir admet un maximum en $k = 0$ pour $q < q_0$ et un minimum pour $q > q_0$.

19. Ces résultats sont obtenus avec la méthode de la référence [3], qui relie les points de non-analyticité en énergie des densités spectrales aux extrema absolus ou relatifs des fonctions $k \mapsto \max_u \epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2} = \epsilon_{k+q/2} + \epsilon_{|k-q/2|}$ et $k \mapsto \min_u \epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2} = 2\epsilon_{(k^2+q^2/4)^{1/2}}$ où $u = \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{q}})$. Dans les deux cas pauvres considérés, ces fonctions sont strictement croissantes sur \mathbb{R}^+ car $-\mu + \hbar^2 q^2/8m > 0$.

20. Les intégrales elliptiques $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ admettent en fonction de k^2 , dans leur détermination habituelle, la ligne de coupure $k^2 \sin^2 \phi \in [1, +\infty[$, soit celle de $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$.

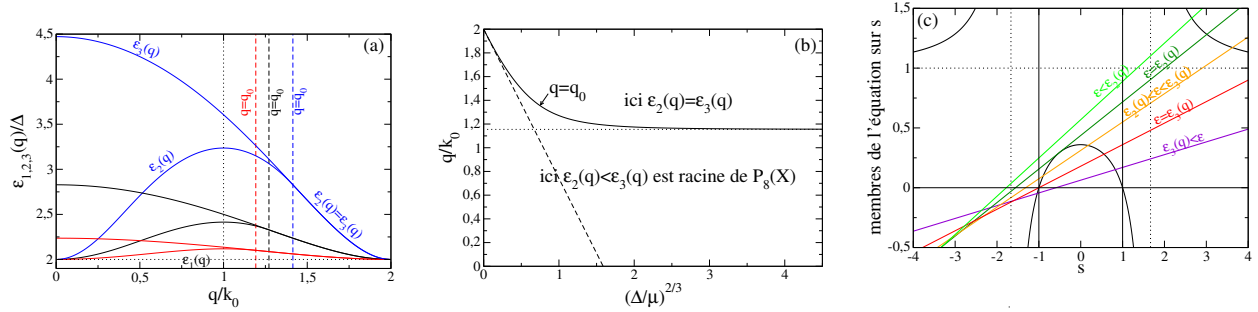


FIGURE 3: Pour un gaz de fermions en interaction de portée nulle (cas des atomes froids) et de potentiel chimique $\mu > 0$, on représente en (a) les énergies $\epsilon_n(q)$, $n \in \{1, 2, 3\}$, des points de non-analyticité dans les densités spectrales $\epsilon \mapsto \rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ sur l'axe réel en fonction du nombre d'onde q en unités de $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, pour différentes valeurs du paramètre d'ordre $\Delta/\mu = 1$ (en noir), $\Delta/\mu = 2$ (en rouge), $\Delta/\mu = 1/2$ (en bleu). Le pointillé horizontal noir représentant $\epsilon_1(q) = 2\Delta$ est commun aux trois valeurs du couplage puisque les énergies sont exprimées en unités de Δ . Pour une valeur de Δ/μ donnée, le trait plein inférieur représente $\epsilon_2(q)$ et le trait plein supérieur représente $\epsilon_3(q)$, les deux courbes se rejoignant en un certain nombre d'onde critique $q = q_0(\Delta)$ (tireté vertical), donné par (57), au-delà duquel elles coïncident par convention ($\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$). Les deux énergies $\epsilon_{1,2}(q)$ se séparent en $q = 0$ et les trois énergies $\epsilon_n(q)$ se rejoignent en $q = 2k_0$, quel que soit Δ . De même, la courbe $\epsilon_2(q)$ atteint son maximum invariablement en $q = k_0$ (pointillé vertical noir), à gauche de $q = q_0$. On représente en (b) le nombre d'onde critique q_0 en fonction de Δ par un trait plein noir. Celui-ci sépare donc la bande $\mathbb{R}^+ \times [0, 2k_0]$ dans le plan (Δ, q) en un domaine supérieur où $\epsilon_2(q) \equiv \epsilon_3(q)$ est donnée par l'équation (56), et un domaine inférieur où $\epsilon_2(q)/\mu < \epsilon_3(q)/\mu$ est la plus grande racine réelle du polynôme $P_8(X)$ de l'équation (59). À la frontière, $\epsilon_2(q)$ subit une transition du second ordre (continuité de $\epsilon_2(q)$ et de sa dérivée première mais discontinuité de sa dérivée seconde $d^2\epsilon_2(q)/dq^2$, voir la note 18). Tireté et pointillé : comportements aux limites (60) de q_0 . On effectue dans (c) une discussion graphique de l'équation (71) sur s en représentant le membre de droite (trait plein noir, asymptotes verticales et horizontale en pointillé) et de gauche (droites obliques en couleur) en fonction de l'inconnue, pour $q = 2k_0/3$, $\epsilon = 5\Delta/2$ et différentes valeurs de Δ/μ [2/3 (vert clair), 0,7607084 (vert foncé), 9/10 (orange), 32/27 (rouge), 2 (violet), de haut en bas en $s = 0$] : dans l'intervalle $[-1, 1]$, délimité par les fines lignes verticales continues, il y a alors successivement 0 racine (cas $\epsilon < \epsilon_2(q)$), 1 racine double (cas $\epsilon = \epsilon_2(q) < \epsilon_3(q)$), 2 racines de valeur absolue < 1 (cas $\epsilon_2(q) < \epsilon < \epsilon_3(q)$), 2 racines dont une égale à -1 (cas $\epsilon = \epsilon_3(q)$), et enfin 1 racine (cas $\epsilon > \epsilon_3(q)$). Dans les densités spectrales, il faut intégrer sur $s \in [-1, 1]$ là où la courbe noire est en dessous de la droite oblique tracée à l'énergie considérée (voir discussion autour de (71)).

et définit les fonctions suivantes d'un angle $\psi \in [0, \pi]$,

$$f_{--}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{sh}^2 \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = E(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) + \frac{\operatorname{sh}^2 \Omega \sin \psi \cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} - F(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) = \operatorname{ch} \Omega E(u, \operatorname{th} \Omega) - \frac{F(u, \operatorname{th} \Omega)}{\operatorname{ch} \Omega} \quad (66)$$

$$f_{++}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \operatorname{ch}^2 \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = E(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) + \frac{\operatorname{sh}^2 \Omega \sin \psi \cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} = \operatorname{ch} \Omega E(u, \operatorname{th} \Omega) \quad (67)$$

$$f_{+-}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \cos \alpha \operatorname{sh} \Omega \operatorname{ch} \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sh} \Omega \operatorname{ch} \Omega \sin \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} \quad (68)$$

où $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ sont les intégrales elliptiques de seconde et première espèce dans la convention §8.111 de [20], on a utilisé §8.127 de [20] et on a posé

$$u = \operatorname{acos} \frac{\cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} \quad (69)$$

Les calculs conduisant à ces résultats sont exposés dans l'Annexe A.2, mais donnons-en ici les grandes lignes. Dans la forme intégrale (13) des densités spectrales, écrite en coordonnées sphériques d'axe \mathbf{q} , on effectue immédiatement l'intégration sur l'angle azimutal grâce à l'invariance par rotation d'axe \mathbf{q} puis, avec plus d'effort, sur l'angle polaire grâce à la distribution de Dirac fixant l'énergie de la paire brisée dans l'intégrande. Il reste à intégrer sur le nombre d'onde k . Cependant, les angles polaires annulant l'argument du Dirac doivent prendre des valeurs physiques, ce qui impose des contraintes sur k . D'abord, ils doivent être réels, ce qui restreint k à un certain segment que l'on paramètre de manière astucieuse comme suit :

$$\check{k}^2 + \frac{\check{q}^2}{4} - 1 \equiv \frac{1}{2} (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} s \quad \text{où } s \in [-1, 1] \quad (70)$$

L'intégrale sur k se ramène donc à une intégrale sur s . Ensuite, ils doivent être dans l'intervalle $[0, \pi]$. Pour implémenter cette contrainte, il faut résoudre l'équation du troisième degré suivante sur s , qui exprime le fait que les angles polaires en question atteignent les bords 0 et π de l'intervalle permis :

$$\frac{4\check{q}^2}{\check{\epsilon}^2} \left[\frac{1}{2} (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} s + 1 - \frac{\check{q}^2}{4} \right] = \frac{1 - s^2}{\frac{\check{\epsilon}^2}{\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2} - s^2} \quad (71)$$

Les angles polaires sont entre 0 et π lorsque le second membre de (71) est inférieur au premier. La discussion graphique sur la figure 3c montre que, pour q assez petit, trois cas se présentent : (i) à énergie assez faible, l'équation (71) n'admet aucune racine dans l'intervalle $[-1, 1]$, et l'on peut donc intégrer sur s dans tout $[-1, 1]$; (ii) aux énergies intermédiaires, l'équation (71) admet deux racines s_1 et s_2 ($s_1 < s_2$) dans $[-1, 1]$, et l'on doit intégrer sur s dans $[-1, s_1] \cup [s_2, 1]$; (iii) à énergie assez élevée, la racine s_1 passe sous -1 et l'équation (71) admet s_2 comme seule racine dans $[-1, 1]$, si bien qu'on doit intégrer sur s dans $[s_2, 1]$. Ces changements de topologie du domaine d'intégration sur s sont à l'origine des points de non-analyticité des densités spectrales. Le point $\epsilon = \epsilon_2(q)$ de la section 4.2.1 correspond à la transition entre les cas (i) et (ii) : $s_1 = s_2$ est racine double et le discriminant de l'équation (71) s'annule, ce qui conduit à $P_8(\check{\epsilon}_2(q)) = 0$, où $P_8(X)$ est le polynôme (59).²¹ Le point $\epsilon = \epsilon_3(q)$ de la section 4.2.1 correspond à la transition entre les cas (ii) et (iii) : on a alors $s_1 = -1$, comme on peut le vérifier par substitution directe de s par -1 dans (71). Quand q est trop grand, le scénario se simplifie : lorsqu'on fait croître l'énergie en partant du cas (i), une racine double $s_1 = s_2$ apparaît certes dans (71), mais cette racine est < -1 , elle n'est pas dans l'intervalle $[-1, 1]$ et l'on peut continuer à intégrer sur $s \in [-1, 1]$; l'énergie continuant à croître, s_2 atteint -1 puis le dépasse alors que s_1 reste < -1 : on a sauté directement du cas (i) au cas (iii). La valeur q_0 de q séparant les deux scénarios (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) et (i) \rightarrow (iii) est donc telle que la racine double $s_1 = s_2$ de (71) apparaisse exactement en -1 ; en écrivant que $s = -1$ est racine de (71) et de sa dérivée par rapport à s , nous tombons sur une équation cubique sur q^2 , équivalente à la condition $d^2\epsilon_3(q)/dq^2 = 0$ de la note 18, et dont (57) est effectivement la solution réelle.

Pour être complets, donnons, lorsque $\epsilon > \epsilon_2(q)$, l'expression des deux plus petites racines réelles s_1 et s_2 de l'équation (71) en termes de l'angle de Cardan γ décrivant $[0, \pi]$:

$$s_{1,2} = \frac{Y_q}{6\check{q}^2(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} - \frac{(Y_q^2 + 12\check{q}^4\check{\epsilon}^2)^{1/2}}{3\check{q}^2(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} \cos \frac{\pi \mp \gamma}{3} \quad \text{où } Y_q = \check{\epsilon}^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2) \text{ et } \gamma = \arccos \frac{Y_q(Y_q^2 - 36\check{\epsilon}^2\check{q}^4) + 216\check{\epsilon}^2\check{q}^4\check{\Delta}^2}{(Y_q^2 + 12\check{q}^4\check{\epsilon}^2)^{3/2}} \quad (72)$$

Notons aussi que le changement de variable $s = \cos \alpha$, où $\alpha \in [0, \pi]$, a été effectué, comme on le voit sur la variable d'intégration dans la définition des fonctions $f_{s,s'}(\psi)$ et sur la valeur de leur argument dans la table 2. Enfin, on peut vérifier que, dans la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ à $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ et $\bar{\epsilon} = \check{\epsilon}/\check{\Delta}$ fixés comme le prescrit (14), les tables 1 et 2 sont en accord; remarque amusante, il y a en fait accord parfait sur les densités spectrales $\rho_{ss}^{(III)}$ même avant prise de la limite (seule la borne supérieure de l'intervalle II est différente à Δ/μ non infinitésimal). Les calculs conduisant à la table 2 s'étendent aisément à q quelconque et à un signe de μ quelconque; ainsi, pour $\mu > 0$ mais $q > 2k_0$, les densités spectrales sont identiquement nulles pour $\epsilon < \epsilon_3(q)$ et de la forme III sinon, comme il ressort de la fin de la section 4.2.1.

21. Il reste à montrer que $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ est la plus grande racine réelle de $P_8(X)$. À cette fin, travaillons sur le polynôme $P_4(X)$ de degré 4 à coefficients réels tel que $P_8(X) = P_4(X^2)$. Dans la méthode de Lagrange, les racines de $P_4(X)$ s'expriment en fonction de celles du polynôme de degré 3 associé $R(X)$ appelé cubique résolvante. Nous disposons du résultat suivant : si $R(X)$ (à coefficients réels) admet une seule racine réelle, celle-ci est positive et $P_4(X)$ possède deux racines réelles x_1 et x_2 et deux racines complexes conjuguées z_0 et z_0^* . Or, $R(X)$ n'a effectivement qu'une seule racine réelle puisque son discriminant de Cardan $\delta = (512/27)\check{\Delta}^4(1 + \check{\Delta}^2)\check{q}^{12}[27\check{\Delta}^4 + 72\check{\Delta}^2\check{q}^4 + 16\check{q}^6(4 - \check{q}^2)]^3$ est > 0 pour $0 < \check{q} < 2$. Pour montrer que x_1 et x_2 sont de même signe, nous utilisons la relation de Viète $x_1 x_2 |z_0|^2 = P_4(0) = \check{q}^6(4 - \check{q}^2)^3[4\check{\Delta}^2 + \check{q}^2(4 - \check{q}^2)] > 0$. Enfin, les racines x_1 et x_2 sont > 0 puisque l'une d'elles n'est autre que $\check{\epsilon}_2^2(q)$; pour montrer que celle-ci est la plus grande des deux, on vérifie que c'est vrai pour $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$ ($\check{\epsilon}_2^2(q)$ est la seule racine de $P_4(X)$ qui diverge) puis on utilise un argument de continuité jusqu'à $\check{\Delta} = 0^+$ (le résultant de $P_4(X)$ et du polynôme dérivé $P_4'(X)$, proportionnel à δ , ne s'annule jamais donc $P_4(X)$ n'a aucune racine double, et x_1 et x_2 ne peuvent se croiser). Cette démonstration ne vaut pas pour $\check{\Delta} = 0$, où z_0 a une limite réelle, x_1 et x_2 se confondent et $\check{\epsilon}_2^2(q)$ est cette fois la plus petite racine de $P_4(X)$.

$\check{\epsilon} < 2\check{\Delta}$	$\check{\rho}_{--}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$ $\check{\rho}_{++}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$ $\check{\rho}_{+-}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$
$2\check{\Delta} < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q})$	$\check{\rho}_{--}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \pi \left[\frac{\check{\epsilon}}{2\check{q}} E(\text{th } \Omega) - \frac{2\check{\Delta}^2}{\check{q}\check{\epsilon}} K(\text{th } \Omega) \right] = \frac{\pi\check{\Delta}}{\check{q}} [E(i \text{ sh } \Omega) - K(i \text{ sh } \Omega)]$ $\check{\rho}_{++}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \pi \left[\frac{\check{\epsilon}}{2\check{q}} E(\text{th } \Omega) \right] = \frac{\pi\check{\Delta}}{\check{q}} E(i \text{ sh } \Omega)$ $\check{\rho}_{+-}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv 0$
$\check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q})$	$\check{\rho}_{--}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{--} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) + f_{--} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$ $\check{\rho}_{++}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{++} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) + f_{++} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$ $\check{\rho}_{+-}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) - f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$
$\check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon}$	$\check{\rho}_{--}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{--} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$ $\check{\rho}_{++}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{++} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$ $\check{\rho}_{+-}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$

TABLE 2: Densités spectrales $--$, $++$ et $+-$ de (13) dans la limite continue $b \rightarrow 0$ de notre modèle sur réseau, en fonction de l'énergie $\epsilon > 0$. La force des interactions est quelconque mais nous nous sommes limités au cas le plus riche $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, où $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ est le nombre d'onde minimisant la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$. Sur chaque intervalle entre l'énergie nulle, les points de non-analyticité ϵ_i donnés dans la section 4.2.1 et l'énergie infinie, ce sont des fonctions lisses de ϵ dont les prolongements analytiques aux énergies complexes diffèrent, d'où leur numérotation en chiffres romains. $E(k)$ et $K(k)$ sont les intégrales elliptiques complètes de seconde et première espèce (voir §8.112 de [20]); $\Omega \in]0, +\infty[$ est un paramétrage hyperbolique commode (65) de l'énergie lorsqu'elle est supérieure à 2Δ ; dans la quatrième et la cinquième ligne de la table, les deux formes données sont équivalentes puisque $E(\text{th } \Omega) = E(i \text{ sh } \Omega) / \text{ch } \Omega$ et $K(\text{th } \Omega) = \text{ch } \Omega K(i \text{ sh } \Omega)$, y compris pour Ω complexe tant que $\text{Re ch } \Omega > 0$; les fonctions f_{--} , f_{++} et f_{+-} sont celles des équations (66), (67) et (68); s_1 et s_2 sont les racines réelles de (71) inférieures à 1 rangées dans l'ordre croissant, lorsqu'elles existent, et sont données par (72). Lorsque $q > q_0$, où q_0 est donné par (57), on a en fait $\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$ (voir la section 4.2.1). Les énergies et nombres d'onde sont adimensionnés comme dans (58) et les densités spectrales comme dans (64).

4.2.3. Comportement des densités spectrales à haute énergie et au bord du continuum

Donnons deux applications très simples des expressions des densités spectrales de la table 2. La première est un développement asymptotique à haute énergie,

$$\begin{pmatrix} \check{\rho}_{++}(\check{\epsilon}, \check{q}) \\ \check{\rho}_{--}(\check{\epsilon}, \check{q}) \\ \check{\rho}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q}) \end{pmatrix}_{\check{\epsilon} \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{8^{1/2}} \left[(\check{\epsilon}^2 + 4\check{\Delta}^2)^{1/2} + 2 - \frac{\check{q}^2}{2} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 5\check{q}^2/12) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \\ (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)\check{\epsilon}^{-2} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 13\check{q}^2/12) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \\ (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}\check{\epsilon}^{-1} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 3\check{q}^2/4) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \end{pmatrix} \quad (73)$$

utile surtout pour contrôler et réduire les erreurs de troncature en énergie dans les calculs numériques de la section 4.4. À l'ordre de ce développement, pourtant assez élevé, on a l'impression que ρ_{+-} est la moyenne géométrique de ρ_{++} et ρ_{--} , ce qui n'est vrai sur aucun voisinage de l'infini [voir les intégrales dans (66), (67) et (68)] sauf si $q = 0$ (voir la note 17). La deuxième application est un développement limité au bord inférieur 2Δ du continuum de paire brisée (ici $0 < \check{q} < 2$):

$$\check{\rho}_{++}(\check{\epsilon}, \check{q}) \underset{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}^+}{=} \frac{\pi^2}{2\check{q}} \left[\check{\Delta} + \frac{1}{4}(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}) + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^2 \right] \quad \text{et} \quad \check{\rho}_{--}(\check{\epsilon}, \check{q}) \underset{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}^+}{=} \frac{\pi^2}{4\check{q}} \left[(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}) - \frac{1}{8\check{\Delta}}(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^2 + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^3 \right] \quad (74)$$

On voit alors, au moyen de (51), que $\check{M}_{++}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q})$ présente sur l'axe réel en $\check{\epsilon} = 2\check{\Delta}$ une singularité logarithmique dans sa partie réelle et une discontinuité dans sa partie imaginaire :

$$\check{M}_{++}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q}) \underset{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}}{=} (2\pi)^{-3} \frac{\pi^2 \check{\Delta}}{2\check{q}} [\ln |\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}| - i\pi \Theta(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})][1 + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})] + \text{fonction lisse de } \check{\epsilon} \quad (75)$$

ce qui explique le pic pointu (à tangente verticale) dans l'intensité de la fonction de réponse module-module à la pulsation $2\Delta/\hbar$, observé mais pas interprété dans la référence [3], et qui n'a rien à voir avec le pic lorentzien du mode du continuum (voir la section 4.3). Dans $\check{M}_{--}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q})$, cette singularité au bord est réduite par un facteur $\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}$. Quant à $\check{M}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q})$, c'est bien sûr une fonction lisse de $\check{\epsilon}$ autour du bord puisque la densité spectrale ρ_{+-} est identiquement nulle sur un voisinage du bord. Les éléments de matrice sont ici adimensionnés comme dans (84).

4.3. Caractériser la branche du continuum : relation de dispersion, poids spectraux, voies optimales d'excitation et d'observation

D'un point de vue expérimental, la présence d'un mode d'énergie complexe z_q dans le continuum de paire brisée se traduit par un pic lorentzien visible dans l'intensité de la fonction de réponse en fréquence du gaz introduite dans [3], ou si l'on préfère dans le module au carré de la transformée de Fourier de la réponse en temps (6), de la forme $\omega \mapsto |Z/(\hbar\omega - z_q)|^2$ où ω est la pulsation, du moins si (i) l'énergie centrale $\text{Re } z_q$ de la lorentzienne se trouve dans l'intervalle $[\epsilon_a, \epsilon_b]$ entre les points de non-analyticité à travers lequel est effectué le prolongement analytique (ϵ_a/\hbar et ϵ_b/\hbar délimitent donc un intervalle d'observabilité en pulsation) et (ii) la mi-largeur en énergie $|\text{Im } z_q|$ de la lorentzienne est suffisamment faible pour qu'on puisse la séparer aisément de la contribution large du continuum [3]. On voit ainsi que le mode est caractérisé par trois grandeurs réelles, sa pulsation $\text{Re } z_q/\hbar$, son taux d'amortissement $|\text{Im } z_q|/\hbar$ et son poids spectral, proportionnel à $|Z|^2$, où Z est le résidu du pôle z_q dans le prolongement analytique de la fonction de réponse expérimentale.

Pour caractériser le mode du continuum, il faut donc d'abord calculer son énergie complexe z_q , en résolvant l'équation (48) après prolongement analytique comme suit :

$$0 = \det M_{\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) \equiv M_{++\downarrow}(z_q, \mathbf{q})M_{--\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) - [M_{+-\downarrow}(z_q, \mathbf{q})]^2 \text{ avec } M_{ss'\downarrow}(z, \mathbf{q}) = M_{ss'}(z, \mathbf{q}) - (2\pi)^{-3} 2i\pi \rho_{ss'}^{(\text{III})}(z, \mathbf{q}) \quad (76)$$

Nous effectuons en effet surtout l'étude pour $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, et pour un prolongement analytique par l'intervalle de type II, soit $2\Delta < \epsilon < \epsilon_2(q)$; les autres cas sont traités dans la section 4.8. Il faut ensuite calculer le résidu Z . Pour cela, nous partons de l'expression temporelle (49) des petits écarts sur le paramètre d'ordre et, dans l'intégrande, nous développons au voisinage de $z = z_q$ l'inverse de la matrice M analytiquement prolongée et ici restreinte à son bloc 2×2 supérieur gauche, ce qui fait apparaître un résidu matriciel \mathcal{M} :

$$M_{\downarrow}(z_q, \mathbf{q})^{-1} \underset{z \rightarrow z_q}{=} \frac{\mathcal{M}}{z - z_q} + O(1) \text{ avec } \mathcal{M} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_q, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} M_{--\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) & -M_{+-\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) \\ -M_{+-\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) & M_{++\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (77)$$

Si l'excitation perturbe seulement la phase du paramètre d'ordre (voie +, première coordonnée) et que l'on mesure la réponse sur la phase du paramètre d'ordre, le résidu pertinent est $Z_+ = \langle +|\mathcal{M}|+ \rangle = M_{--\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) / \left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_q, \mathbf{q})$. Inversement, si l'on excite initialement et l'on mesure finalement seulement le module du paramètre d'ordre (voie -, seconde coordonnée), le bon résidu est $Z_- = \langle -|\mathcal{M}|- \rangle = M_{++\downarrow}(z_q, \mathbf{q}) / \left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_q, \mathbf{q})$. Dans le cas général, le résidu Z dans la réponse du gaz est une combinaison linéaire des éléments de matrice de \mathcal{M} , avec des coefficients dépendant de l'excitation appliquée au gaz et de l'observable mesurée. En appliquant le théorème des résidus à (49) comme dans la figure 1, nous trouvons la contribution du mode du continuum au signal en temps :

$$\text{signal}(t)|_{\text{pôle } z_q} = Z e^{-iz_q t/\hbar} \text{ avec } Z = \langle \chi_{\text{obs}} | \mathcal{M} | \chi_{\text{exc}} \rangle \quad (78)$$

où les amplitudes $\langle \chi_{\text{obs}} | + \rangle$ et $\langle \chi_{\text{obs}} | - \rangle$ sont celles de l'observable mesurée dans les voies phase et module, et les amplitudes $\langle + | \chi_{\text{exc}} \rangle$ et $\langle - | \chi_{\text{exc}} \rangle$ sont celles de l'excitation appliquée dans ces mêmes voies. Notons que $|\chi_{\text{exc}} \rangle$ n'a pas d'expression simple, mais fait intervenir le vecteur source dans (49) prolongé analytiquement en $z = z_q$, lui-même fonction de l'excitation appliquée au travers des $y_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\pm}$ donc de la perturbation initiale du vecteur d'état BCS (1). Cependant, comme la matrice \mathcal{M} est par construction de déterminant nul, elle est en général de rang un ; après

réflexion, on arrive à la mettre sous une forme dyadique particulièrement simple, en termes de vecteurs $\hat{\chi}$ normalisés à l'unité, après avoir sorti un résidu réel global réduit Z_{opt} :

$$\mathcal{M} = Z_{\text{opt}} |\hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}}\rangle \langle \hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}}| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |\hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}}\rangle \equiv Z_{\text{opt}}^{-1/2} \begin{pmatrix} Z_+^{1/2} \\ -\varepsilon Z_-^{1/2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |Z_+|^{1/2} \\ e^{-i\theta} |Z_-|^{1/2} \end{pmatrix} \\ |\hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}}\rangle \equiv Z_{\text{opt}}^{-1/2} \begin{pmatrix} Z_+^{1/2} \\ -\varepsilon Z_-^{1/2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |Z_+|^{1/2} \\ e^{i\theta} |Z_-|^{1/2} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon \in \{+, -\} \quad (79)$$

Le résidu global réduit est simplement la somme des modules des résidus particuliers Z_+ et Z_- . Comme on le voit, les vecteurs de la dyade s'expriment en termes de ces modules et d'un angle θ , phase relative de l'amplitude de couplage module-phase et d'une amplitude de couplage diagonale dans la matrice M analytiquement prolongée en $z_{\mathbf{q}}$:

$$Z_{\text{opt}} = |Z_+| + |Z_-| \quad \text{et} \quad \theta = \arg[-M_{+-}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})/M_{--}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})] \quad (80)$$

On aura compris que $\arg(Z_-/Z_+) = 2\theta$ puisque $Z_+/Z_- = M_{--}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})/M_{++}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. En rapprochant (79) et (78), on voit que $|\hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}}\rangle$ donne l'observable optimale, c'est-à-dire la combinaison linéaire relative des voies phase et module à observer pour maximiser le résidu $|Z|$ donc le poids du mode du continuum dans le signal expérimental ; de même, $|\hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}}\rangle$ donne les amplitudes relatives de l'excitation qu'il faut produire sur la phase et le module du paramètre d'ordre pour maximiser le poids du mode du continuum dans le signal, à observable fixée. Si ces optimisations sont faites conjointement sur l'excitation et l'observation, on réalise le poids modal maximal accessible à normes de $\langle \chi_{\text{obs}} |$ et $|\chi_{\text{exc}} \rangle$ fixées, de résidu $Z_{\text{opt}} \|\chi_{\text{obs}}\| \|\chi_{\text{exc}}\|$. Pour calculer le dénominateur de \mathcal{M} dans (77), on a besoin des dérivées des densités spectrales par rapport à z , qui s'écrivent simplement (voir §8.123 de [20]) :

$$\frac{d}{dz} \rho_{++}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{\check{z}}{\check{z}^2 - 4\check{\Delta}^2} \check{\rho}_{--}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \rho_{--}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{1}{\check{z}} \check{\rho}_{++}^{[\text{M}]}(\check{z}, \check{q}) \quad (81)$$

où $\check{z} = z/\mu$ comme dans (58). La dérivée des éléments de matrice de M s'obtient par différentiation des formes (50,51) sous le signe intégral.

4.4. Résultats numériques sur la branche du continuum

Nous résolvons numériquement l'équation aux énergies propres (76) sur le mode du continuum, en évaluant les formes intégrales (50,51) et les fonctions elliptiques dans les densités spectrales de la table 2 comme dans la section 3.4.1. Ici, $\mu > 0$ et le prolongement analytique est fait à travers l'intervalle II , $2\Delta < \varepsilon < \varepsilon_2(q)$, si bien que le nombre d'onde q varie entre les points d'ouverture $q = 0$ et de fermeture $q = 2k_0$ de l'intervalle. La relation de dispersion, les résidus dans les voies de phase et de module, le résidu optimal réduit Z_{opt} et l'angle θ définissant la voie d'observation optimale ainsi obtenus (voir la section 4.3) sont représentés sur la figure 4, pour un couplage faible $\Delta/\mu = 1/5$, un couplage fort $\Delta/\mu = 1$ et un couplage $\Delta/\mu = 10$ proche de l'annulation du potentiel chimique.

Dans tous les cas, la partie imaginaire de $z_{\mathbf{q}}$ est une fonction négative décroissante du nombre d'onde q . La partie réelle a un comportement plus riche en couplage faible : elle passe par un maximum relatif $> 2\Delta$ puis par un minimum absolu $< 2\Delta$ à faible q , avant de se mettre à croître de manière approximativement linéaire à grand q . En couplage fort, la structure riche se maintient mais est étirée en nombre d'onde (le minimum absolu se situe à $q \approx k_0$) et le maximum relatif est à peine perceptible. Près du point d'annulation de μ , la partie réelle devient à son tour une fonction décroissante de q , et est partout inférieure à 2Δ , ce qui ne fait pas véritablement rentrer le mode dans la bande interdite $[0, 2\Delta]$ puisque son énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ en reste séparée par la partie de la ligne de coupure rabattue sur $]-\infty, 2\Delta]$ dans la prescription (12) ; en particulier, on n'attend pas de pic lorentzien dans les fonctions de réponse du système à la pulsation $\omega = \text{Re } z_{\mathbf{q}}/\hbar$ car celle-ci est en dehors de la fenêtre d'observabilité (voir la section 4.3 et la référence [3]). La situation est la même pour la partie de la branche de $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > \varepsilon_2(q)$, qui est séparée de l'axe réel physique par deux lignes de coupure superposées, celle préexistante et celle provenant du rabat sur $[\varepsilon_2(q), +\infty[$ d'une partie de la ligne de coupure $[2\Delta, \varepsilon_2(q)]$. Paradoxalement, on remarque que les parties réelle et imaginaire de $\check{z}_q - 2\check{\Delta}$ les plus grandes en valeur absolue sur $]0, 2k_0[$ sont atteintes dans le régime de couplage faible plutôt que dans le régime $\Delta/\mu \geq 1$.

Le résidu Z_- dans la voie – des écarts en module du paramètre d'ordre domine fortement celui Z_+ des écarts en phase, comme on le constate sur la seconde colonne de la figure 4, sauf en couplage faible pour $q \approx k_0$ où $|Z_+| \approx |Z_-|$;

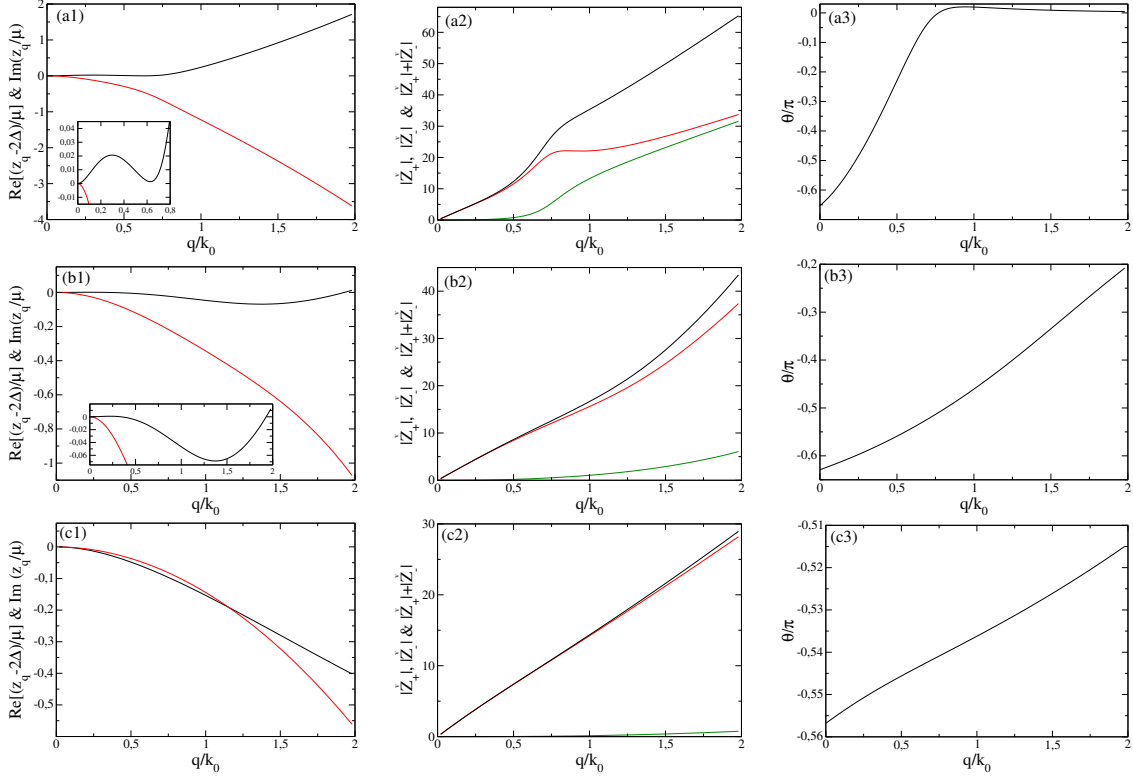


FIGURE 4: Dans un gaz de fermions en interaction de portée nulle (cas des atomes froids) et de potentiel chimique $\mu > 0$, en colonne 1 : relation de dispersion complexe $q \mapsto z_q$ du mode du continuum, obtenue par résolution numérique de l'équation (76) ; le prolongement analytique est de type II, donc q décrit $]0, 2k_0[$ où $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. Trait plein noir : partie réelle décalée de sa limite à l'origine 2Δ ; trait plein rouge : partie imaginaire. Le paramètre d'ordre vaut en ligne (a) $\Delta/\mu = 1/5$, en ligne (b) $\Delta/\mu = 1$ et en ligne (c) $\Delta/\mu = 10$. En colonne 2 : résidus $|Z_+|$ (en vert) et $|Z_-|$ (en rouge) du mode dans les voies de phase (indice +) et de module (indice -) des écarts du paramètre d'ordre à l'équilibre, et résidu maximal réduit accessible $|Z_+| + |Z_-|$ (en noir), en fonction du nombre d'onde q en unités de k_0 , après adimensionnement comme dans l'équation (84). En colonne 3 : angle θ apparaissant dans les voies d'excitation et d'observation optimales (79) permettant d'atteindre le résidu maximal réduit $|Z_+| + |Z_-|$. Les vignettes dans (a1) et (b1) sont des agrandissements.

la domination de $|Z_-|$ est particulièrement nette à faible q , où $|Z_+|$ tend vers zéro beaucoup plus rapidement que la loi linéaire suivie par $|Z_-|$. Du point de vue de son poids spectral, le mode du continuum reste donc ici essentiellement un mode de module, comme il l'était dans la limite de couplage faible à $q/k_0 = O(\Delta/\mu)$, même si le couplage phase-module M_{+-} dans la matrice M ne peut absolument pas être négligé dans le calcul de son énergie propre z_q , au contraire de l'équation (34). Quant au déphasage θ entre les deux voies maximisant le poids spectral, dans la troisième colonne de la figure 4, il croît de manière vaguement linéaire en q sur tout l'intervalle $]0, 2k_0[$, sauf en couplage faible où il atteint un plateau proche de zéro.

Les études analytiques des sections 4.5, 4.6 et 4.7 fournissent une explication à la fois physique et quantitative de ces observations.

4.5. La branche du continuum à faible q

Comme dans la référence pionnière [2], il faut avant toute chose étudier analytiquement le mode du continuum à faible nombre d'onde. Nous reprenons ici en grande partie les résultats à q infinitésimal de [3] (section 4.5.1) en les affinant (la section 4.5.2 en précise le domaine d'applicabilité en nombre d'onde) et en les étendant à d'autres grandeurs que z_q et Z_- (section 4.5.3).

4.5.1. Le départ quadratique et son coefficient

Comme l'a montré la référence [2] dans la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0$ et la référence [3] pour un couplage quelconque $\Delta/\mu > 0$, la branche du continuum (pour un prolongement analytique de type II) a un départ quadratique à faible nombre d'onde q :

$$\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} 2\check{\Delta} + \zeta \frac{\check{q}^2}{\check{\Delta}} + O(\check{q}^3) \quad (82)$$

avec un coefficient complexe ζ solution dans le demi-plan complexe inférieur de l'équation transcendante²²

$$\left[\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right] \left[\left(\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right] + 128\pi^2 [\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 = 0 \quad (83)$$

L'élément non diagonal de M , c'est-à-dire le couplage phase-module, est écrit ici à l'ordre zéro en q donc à l'énergie 2Δ et au nombre d'onde nul, sous une forme adimensionnée que nous appliquerons dans la suite à tous les éléments de matrice et par ricochet aux résidus :

$$M_{ss'}(z, \mathbf{q}) = \frac{2mk_0}{\hbar^2} \check{M}_{ss'}(\check{z}, \check{q}) \quad \text{et} \quad Z_{\pm} = \frac{\hbar^4 k_0}{4m^2} \check{Z}_{\pm} \quad (84)$$

En posant $1/\check{\Delta} = \operatorname{sh} \tau$, nous tirons de [3] la forme explicite

$$\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0) = -\frac{(e^{2\tau} - 1)^{1/2}}{(2\pi)^2} \left[\operatorname{Re} \Pi(e^{\tau}, ie^{\tau}) - \Pi(-e^{\tau}, ie^{\tau}) + \frac{K(ie^{\tau})}{\operatorname{sh} \tau} \right] < 0 \quad \forall \Delta/\mu > 0 \quad (85)$$

Reproduisons également les développements à faible et à grand Δ/μ de [3], en poussant le calcul un ordre plus loin à grand Δ/μ :²³

$$\zeta \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0^+}{=} \zeta_0 - \frac{2\zeta_0^2}{\zeta_0 - 1} \left(\frac{\check{\Delta}}{\pi} \right)^2 \ln^2 \frac{\check{\Delta}}{8e} + O(\check{\Delta}^3 \ln^{\alpha} \check{\Delta}) \quad \text{et} \quad \zeta \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{=} -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{\Delta} - \frac{24i\sqrt{2}}{\pi^{7/2}} [\Gamma(5/4)]^2 \check{\Delta}^{1/2} + \frac{5}{2\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad (86)$$

La valeur ζ_0 est celle (38) de la limite de couplage faible, et il faut remarquer à grand Δ/μ que ζ est réel à l'ordre dominant. La référence [3] donne aussi un équivalent de Z_{-} , voir notre équation (92). Il n'est pas utile ici de préciser la valeur de l'exposant $\alpha > 0$ dans (86).

4.5.2. Régime de validité de l'approximation quadratique

La référence [3] ne précise pas jusqu'à quelle valeur de q on peut se contenter de l'approximation quadratique (82) sur z_q . Faisons donc une revue critique des différentes approximations y conduisant. Essentiellement, [3] a posé $\check{k} = 1 + \check{q}K$ dans la définition intégrale (8) des éléments de matrice de M et, en coordonnées sphériques d'axe \mathbf{q} , a fait tendre \check{q} vers zéro sous le signe intégral à K fixé. Au dénominateur de l'intégrande, ceci suppose une quadratisation de la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$ autour de son minimum (atteint en $\check{k} = 1$), ce qui enchaîne en réalité les deux approximations quadratiques suivantes,

$$\check{\epsilon}_{\mathbf{k}} = [(\check{k}^2 - 1)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \simeq [4(\check{k} - 1)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \simeq \check{\Delta} + \frac{2(\check{k} - 1)^2}{\check{\Delta}} \quad (87)$$

dont la condition de validité globale est

$$|\check{k} - 1| \ll \min(1, \check{\Delta}) \quad (88)$$

22. En posant $S = 2(\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})$, on a aussi $\zeta = 2/(1 - \cos S)$ avec S solution de $S(S + \sin S) + 256\pi^2 [\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 (1 - \cos S) = 0$ (sachant que $[(1 + \cos S)/(1 - \cos S)]^{1/2} = -\sin S/(1 - \cos S)$), qui ressemble dans la limite de couplage faible à l'équation (2.16) de [2].

23. Dans (86), nous avons utilisé entre autres le fait non trivial que $\operatorname{Re} \Pi(e^{\tau}, ie^{\tau}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} K(i) - E(i)/2$; par rapport à [3], nous avons préféré faire apparaître une fonction Γ plutôt que des intégrales elliptiques, à l'aide des identités $K(i) = (8/\pi)^{1/2} [\Gamma(5/4)]^2$ et $E(i) - K(i) = [\Gamma(3/4)]^2 / (2\pi)^{1/2}$.

On aboutit *in fine* aux équivalents (u est le cosinus de l'angle polaire) :²⁴

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi \check{\Delta}}{4\check{q}(2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{K^2 + (u^2 - \zeta)/4} \quad \text{et} \quad \check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi \check{q}}{4\check{\Delta}(2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dK(\zeta - u^2)}{K^2 + (u^2 - \zeta)/4} \quad (89)$$

dont l'intégration explicite puis le prolongement analytique de $\text{Im } \zeta > 0$ à $\text{Im } \zeta < 0$ à travers $[0, 1]$ (c'est l'intervalle à choisir compte tenu du comportement de $\check{\xi}_2(\check{q})$ à faible \check{q} dans la section 4.2.1) donne [3]

$$\check{M}_{++}(\check{z}_q, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i\pi^2 \check{\Delta}}{(2\pi)^3 \check{q}} \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \quad \text{et} \quad \check{M}_{--}(\check{z}_q, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i\pi^2 \check{q}}{(2\pi)^3 2\check{\Delta}} \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right] \quad (90)$$

et reproduit (83). En réalité, intégrer par rapport à K sur tout \mathbb{R} n'a de sens que si les intégrales convergent à l'intérieur du domaine de validité de l'approximation quadratique (87), donc si $\check{k} - 1 = \check{q}K$ satisfait à la condition (88). Comme la largeur en K dans (89) est de l'ordre de $|\zeta|^{1/2}$ si $1 \lesssim |\zeta|$ et de l'ordre de l'unité sinon, nous aboutissons à la contrainte

$$\check{q} \ll \frac{\min(1, \check{\Delta})}{(1 + |\zeta|)^{1/2}} \approx \begin{cases} \check{\Delta} & \text{si } \check{\Delta} \rightarrow 0 \\ \check{\Delta}^{-1/2} & \text{si } \check{\Delta} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (91)$$

Dans la limite de couplage faible, elle reproduit l'inégalité attendue $\check{q} \ll \check{\Delta}$ [2] c'est-à-dire $q\xi \ll 1$ où ξ est la taille d'une paire liée. Au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique, elle fait apparaître l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$, dont nous n'avons pas d'interprétation physique mais qui ressortira dans la section 4.7.

4.5.3. Autres observables à faible q

Des équivalents (90) sur les éléments de matrice de M prolongés analytiquement, nous tirons les équivalents des résidus dans la voie de phase + et la voie de module -, et du déphasage entre les deux voies maximisant le résidu global :

$$\check{Z}_- \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{2i\check{q}}{\pi^2} \frac{(2\pi)^3 (\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})}{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})^2 + \frac{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})\zeta - \sqrt{\zeta - 1}}{2\zeta \sqrt{\zeta - 1}}} \quad \text{et} \quad \check{Z}_+ \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{i\check{q}^3}{\pi^2 \check{\Delta}^2} \frac{(2\pi)^3 \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right]}{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})^2 + \frac{(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}})\zeta - \sqrt{\zeta - 1}}{2\zeta \sqrt{\zeta - 1}}} \quad (92)$$

$$\theta \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \arg \left[(-i) \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \right] \quad (93)$$

Il a suffi pour cela de revenir aux définitions de ces grandeurs dans la section 4.3 et de prendre la dérivée de (90) par rapport à ζ . L'équivalent de Z_- était déjà dans [3]. Celui de Z_+ , qui s'annule cubiquement plutôt que linéairement, explique la domination écrasante de la voie - à faible q dans la deuxième colonne de la figure 4. Enfin, la relation (93) donne le point de départ des courbes dans la troisième colonne de la figure 4.

4.6. La branche du continuum pour $\Delta/\mu \ll 1$

Dans la limite de couplage faible, nous étudions la branche du continuum (par prolongement analytique de type II) aux échelles de nombre d'onde $q/k_0 \approx \Delta/\mu$ (section 4.6.1), $q \approx k_0$ (section 4.6.2) et $q/k_0 \approx (\Delta/\mu)^{2/3}$ (section 4.6.3). La première échelle est naturelle, elle correspond à $1/\xi$ où ξ est la taille d'une paire liée $\uparrow \downarrow$; l'étude spectrale ayant déjà été faite dans la section 3, nous nous contenterons d'ajouter quelques résultats sur les résidus et sur l'angle θ de la section 4.3. La deuxième échelle a été ignorée dans la section 3 mais elle reste naturelle : elle correspond à la largeur $2k_0$ de l'intervalle d'existence en q de la branche. La troisième échelle résulte d'une étude approfondie : c'est le chaînon manquant permettant de raccorder la limite à grand nombre d'onde de la première échelle et la limite à faible nombre d'onde de la deuxième ; elle contient aussi le minimum de la partie réelle de la relation de dispersion.

24. La seconde intégrale de (89) figure dans l'équation (2.13) de la référence [2] au changement de variable trivial près $K = K'/2$.

4.6.1. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}$

Comme dans la section 3.2.1, nous faisons tendre Δ/μ vers zéro à $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ fixé, après adimensionnement des énergies par Δ , $\bar{z} = z/\Delta$. À l'ordre zéro en Δ/μ , nous retrouvons la même relation de dispersion limite $\bar{q} \mapsto \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, solution de (34) et dont l'étude a déjà été faite dans la section 3.4. Donnons cependant quelques résultats complémentaires. Numériquement, nous représentons sur la figure 5a la partie réelle de la relation de dispersion, dans l'adimensionnement des variables \bar{q} et \bar{z} , pour des valeurs faibles et décroissantes de Δ/μ , afin d'illustrer la convergence vers la loi limite et de révéler la présence à des \bar{q} croissants d'un minimum décroissant, totalement absent de cette loi limite et dont l'élucidation est reportée à la section 4.6.3. Analytiquement, nous complétons la section 3.4 en donnant un équivalent du résidu du mode du continuum, au sens de la section 4.3, dans la voie de module :

$$\check{Z}_- \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\sim} \check{q}^{\text{fixé}} \check{\Delta} \check{Z}_-^{(0)} \quad \text{avec} \quad \check{Z}_-^{(0)} \equiv \frac{1}{\frac{d}{d\bar{z}} \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})} \quad (94)$$

Des sections 3.4.2 et 3.4.3, nous tirons son comportement à faible nombre d'onde réduit

$$\check{Z}_-^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} (2\pi)^2 \left[Z_1 \bar{q} + Z_2 \bar{q}^2 + Z_3 \bar{q}^3 + O(\bar{q}^4) \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Z_1 = 2i\zeta_0/(\pi\sqrt{\zeta_0-1}) & \simeq -0,125\,634 + 0,235\,132\,i \\ Z_2 = 2\zeta_0^2(3\zeta_0-5)/[3\pi^2(\zeta_0-1)^2] & \simeq 0,043\,448 + 0,046\,167\,i \\ Z_3 = \frac{-2i\zeta_0^2}{\pi^3\sqrt{\zeta_0-1}} \left[1 + \frac{3\pi^2}{32} + \frac{8/9}{(\zeta_0-1)^3} \right] & \simeq 0,008\,812 - 0,017\,157\,i \end{cases} \quad (95)$$

et à grand nombre d'onde réduit (il n'est pas utile de préciser la valeur de l'exposant α) :

$$\text{Im} \check{Z}_-^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{(2\pi)^2 \bar{q}}{\pi/2 + \text{atan} Y_0} + O(\ln^\alpha \bar{q}/\bar{q}) \quad \text{et} \quad \text{Re} \check{Z}_-^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{(2\pi^2)^2 [\pi/2 + \text{atan} Y_0 + Y_0/(1+Y_0^2)]}{\bar{q} Y_0^2 (\pi/2 + \text{atan} Y_0)^3} + o(1/\bar{q}) \quad (96)$$

où le nombre réel Y_0 est la solution de (44). Enfin, nous donnons à l'ordre dominant le résidu dans la voie de phase et le déphasage θ entre les deux voies maximisant le résidu total :

$$\check{Z}_+^{(3)} = \check{\Delta} \check{Z}_-^{(0)} \left[\frac{\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})}{\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})} \right]^2 \quad \text{et} \quad \theta^{(0)} = \arg \left[-\frac{\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})}{\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})} \right] \quad (97)$$

Les expressions des éléments de matrice sont données à l'ordre zéro en Δ/μ par (31,33) (avant prolongement analytique et sans l'adimensionnement (84)), et à l'ordre un pour le couplage phase-module par l'équation (109) à venir. On voit donc que le résidu dans la voie de phase est, relativement à la voie de module, réduit par un facteur $\check{\Delta}^2 \ll 1$. La figure 7 reprend l'ensemble de ces quantités pour une valeur fixée, très faible, de Δ/μ .

4.6.2. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

Que l'on soit en couplage faible ou pas, l'essentiel de la branche du continuum (pour un prolongement analytique de type II) vit avec un nombre d'onde q d'ordre k_0 . Nous l'étudions donc ici en passant à la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\check{q} \in]0, 2[$ fixé; au vu des résultats numériques de la figure 4, nous nous attendons à une énergie propre réduite \check{z}_q d'ordre 0 en $\check{\Delta}$. En repartant de la section 4.2.1, on constate dans cette limite que $\check{q}_0 \rightarrow 2 > \check{q}$, si bien que les densités spectrales comportent *a priori* trois points distincts de non-analyticité sur le demi-axe réel positif, dont les expressions sont très simples à l'ordre zéro en $\check{\Delta}$:

$$\check{\xi}_1(\check{q}) \rightarrow 0, \quad \check{\xi}_2(\check{q}) \rightarrow \check{\xi}_2^{(0)}(\check{q}) = \check{q}(2 - \check{q}) \quad \text{et} \quad \check{\xi}_3(\check{q}) \rightarrow \check{\xi}_3^{(0)}(\check{q}) = 2(1 - \check{q}^2/4) \quad (98)$$

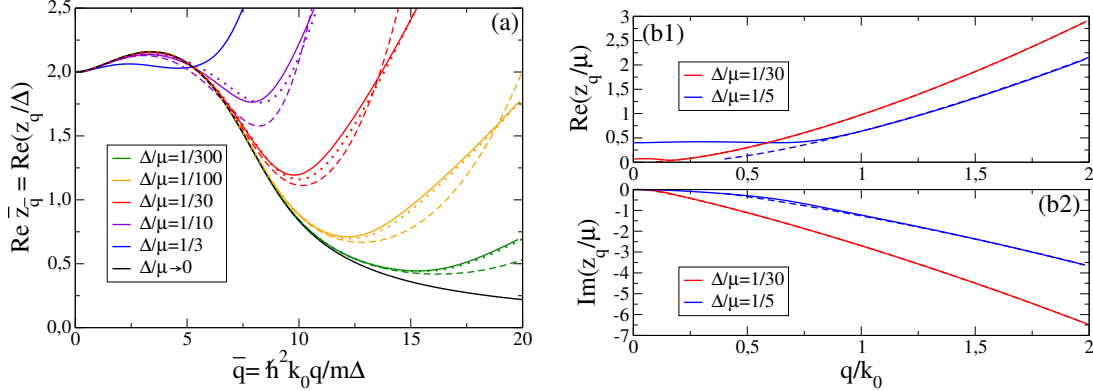


FIGURE 5: Dans la limite $\Delta/\mu \ll 1$, convergence de la branche du continuum $q \mapsto z_q$ (a) à $\bar{q} = \hbar^2 k_0 q / m \Delta$ fixé vers la loi limite $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$, où $\bar{z}_q^{(0)}$ est solution de l'équation (34), et (b) à $\bar{q} = q/k_0$ fixé vers la loi à l'ordre dominant $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$ définie par l'équation (102). Dans (a), restreinte pour alléger à la partie réelle de z_q , en trait plein : relation de dispersion exacte, obtenue par résolution numérique de l'équation (76) (en couleur), ou de l'équation (34) pour $\Delta/\mu \rightarrow 0$ (en noir); en tireté : relation de dispersion au second ordre en Δ (111); en gros pointillé : prédiction \bar{z}_q^{trin} (118) de l'équation du second degré (117) sur z_q . Dans (b1) pour la partie réelle et (b2) pour la partie imaginaire : en trait plein, relation de dispersion exacte; en tireté : loi à l'ordre dominant (102) (pour $\Delta/\mu = 1/30$, le tireté est bien présent mais il est masqué par le trait plein). Les valeurs de Δ/μ utilisées sont précisées sur la figure.

Cependant, le calcul des densités spectrales de la table 2 lorsque $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à énergie $\check{\epsilon}$ fixée fait apparaître un *nouveau* point anguleux $\check{\epsilon}_0(\check{q}) = \check{q}(2 + \check{q})$, situé, selon la position de \check{q} par rapport à $2/3$, entre $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ et $\check{\epsilon}_3(\check{q})$ ou au-delà de $\check{\epsilon}_3(\check{q})$:

$0 < \check{q} < 2/3$	$0 < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{q}(2 + \check{q})$	$\check{q}(2 + \check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon}$
$\check{\rho}_{ss}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{2\check{q}}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}[(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2} + (\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}]$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$
$\check{\rho}_{+-}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	0	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} - \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}[(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2} - (\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}]$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$
$2/3 < \check{q} < 2$	$0 < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{q}(2 + \check{q})$	$\check{q}(2 + \check{q}) < \check{\epsilon}$
$\check{\rho}_{ss}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{2\check{q}}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$
$\check{\rho}_{+-}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	0	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}} - \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi \check{\epsilon}}{4\check{q}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$

Ce point anguleux supplémentaire reste simple à interpréter : comme on peut le voir sur (59), le polynôme $P_8(X)$ admet pour $\check{\Delta} = 0$ deux racines réelles positives, l'une étant $\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$ comme il se doit, et l'autre étant justement $\check{\epsilon}_0(\check{q})$; le fait que la première soit toujours inférieure à la seconde, alors que $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ est la plus grande racine réelle de $P_8(X)$ à $\check{\Delta}$ non nul, n'est qu'un paradoxe que la dernière phrase de la note 21 explique parfaitement. Passons ensuite à la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à \check{z} fixé dans l'expression (50,51) des éléments de matrice de M , en utilisant (99) et le comportement limite $C(\Delta) = 2\pi[\ln(8/\check{\Delta}) - 2] + o(1)$ de la scorie de régularisation. Nous tombons sur des intégrales en énergie assez simples mais un peu longues à calculer; après prolongement analytique de type II comme dans (76), nous trouvons finalement pour $\text{Im} \check{z} < 0$ à l'ordre zéro en $\check{\Delta}$:

$$\check{M}_\downarrow(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{z} \text{ et } \check{q} \text{ fixés}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\approx}} \check{M}_\downarrow^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + o(1) \quad \text{avec} \quad \check{M}_\downarrow^{(0)}(\check{z}, \check{q}) = \begin{pmatrix} \alpha(\check{z}) & \beta(\check{z}) \\ \beta(\check{z}) & \alpha(\check{z}) \end{pmatrix} \quad (100)$$

L'équation aux énergies propres se sépare donc en $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$; comme on peut le vérifier, c'est la première des deux qui contient le mode du continuum, et c'est donc la seule que nous écrivons explicitement ici :

$$(2\pi)^2[\alpha(\check{z}) + \beta(\check{z})] = \ln\left(\frac{8}{\check{\Delta}\epsilon}\right) + \frac{\check{z}}{4\check{q}}[\ln(\check{z} + 2\check{q} - \check{q}^2) - \ln(\check{z} - 2\check{q} - \check{q}^2) - 2i\pi] - \left(\frac{\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})}{2}\right)^{1/2} \left\{ \text{argth} \frac{[2(\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}))]^{1/2}}{\check{q} + 2} + \text{argth} \frac{2 - \check{q}}{[2(\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}))]^{1/2}} \right\} \quad (101)$$

Comme on le voit, il reste dans l'équation une dépendance logarithmique en le paramètre d'ordre adimensionné $\check{\Delta}$. L'énergie propre admet ainsi un ordre zéro en $\check{\Delta}$ bien défini, mais pas une limite finie. Nous écrivons pour résumer :

$$\boxed{z_q \stackrel{\check{q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\sim}} z_q^{(0)} + o(1) \quad \text{avec} \quad \alpha(z_q^{(0)}) + \beta(z_q^{(0)}) = 0} \quad (102)$$

Par résolution numérique, nous obtenons les courbes tirées sur les figures 5b1 et 5b2, en accord remarquable avec le résultat exact sauf au voisinage de $\check{q} = 0$, bien que les valeurs de $\check{\Delta}$ choisies ne soient pas extrêmement faibles. Nous obtenons aussi analytiquement le comportement de l'énergie propre d'ordre zéro du mode à faible nombre d'onde :

$$z_q^{(0)} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \check{\zeta}_0 \check{q} + \check{\zeta}_1 \check{q}^2 + o(\check{q}^2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \check{\zeta}_0 = -2iY_0|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} = 2Z_0|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} \\ \check{\zeta}_1 = -\frac{Y_0 \left[\ln \frac{\check{\Delta}}{8} + \left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0 \right) Y_0 \right]}{\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0} \Big|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} \end{cases} \quad (103)$$

où Y_0 est solution de l'équation transcendante (44). Il est entendu que les limites $\check{\Delta} \rightarrow 0$ et $\check{q} \rightarrow 0$ ne commutent pas. On peut se demander cependant, dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$, si les régimes $\check{q} = 2\check{q}/\check{\Delta} \gg 1$ et $\check{q} \ll 1$ se raccordent. En comparant les coefficients du développement asymptotique (43) de la section 3 et du développement limité (103), nous trouvons que les parties imaginaires se raccordent parfaitement à l'ordre dominant q (nous retrouvons dans (103) le coefficient Z_0 de (43)), mais que les parties réelles ne se raccordent pas du tout, même au niveau de leur loi de puissance ($1/\check{q}$ et \check{q}^2 sont d'exposants différents -1 et $+2$ en q); ce fait très intéressant sera exploité et expliqué dans la section 4.6.3. Nous obtenons par ailleurs le développement asymptotique de l'énergie propre en le logarithme du paramètre d'ordre :

$$z_{\check{q}}^{(0)} \underset{\ln \frac{1}{\check{\Delta}} \rightarrow +\infty}{\underset{\check{q} \in]0,2[\text{ fixé}}{=} } -\frac{2i\check{q}}{\pi} \ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} + \frac{\check{q}^{3/2}e^{-i\pi/4}}{\pi^{1/2}} \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{1/2} + \frac{\check{q}^2}{4} + \frac{e^{i\pi/4}}{2} (\pi\check{q})^{1/2} \left(1 - \frac{3\check{q}^2}{16} \right) \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{-1/2} - \frac{4}{3} \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{-1} + O \left(\ln \frac{1}{\check{\Delta}} \right)^{-3/2} \quad (104)$$

Le logarithme n'étant jamais très grand dans un gaz d'atomes froids, l'intérêt pratique de (104) est assez réduit, bien que nous soyons allés à un ordre déraisonnablement élevé. Nous en tirons cependant, en quittant tous les adimensionnements, un équivalent très suggestif dans la limite mathématique d'interaction faible²⁵

$$\boxed{z_q \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\underset{q \in]0,2k_F[\text{ fixé}}{\sim}} } -\frac{i\hbar^2 q}{2m|a|} \quad (105)$$

où, rappelons-le, a est la longueur de diffusion et k_F le nombre d'onde de Fermi. Enfin, pour être complets, donnons l'expression des autres observables de la section 4.3 à l'ordre zéro en $\check{\Delta}$ à \check{q} fixé, à savoir les résidus dans les voies de phase + et de module -, ainsi que le déphasage dans la superposition de ces deux voies maximisant le résidu total :

$$Z_{\pm}^{(0)} = \frac{1/2}{\alpha'(z_q^{(0)}) + \beta'(z_q^{(0)})} = \frac{(4\pi)^2 \check{q} [z_q^{(0)} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})]}{[z_q^{(0)} + 2\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})][\ln(z_q^{(0)} + 2\check{q} - \check{q}^2) - \ln(z_q^{(0)} - 2\check{q} - \check{q}^2) - 2i\pi] - 4\check{q} \ln \frac{8}{\check{\Delta}e}} \quad \text{et} \quad \theta^{(0)} = \arg 1 = 0 \quad (106)$$

Ces expressions découlent directement du fait que le résidu matriciel dans (77) s'écrit après adimensionnement

$$\check{M} = \frac{1/2}{\alpha'(z_q^{(0)}) + \beta'(z_q^{(0)})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

ce qui montre bien que le mode du continuum est, dans cette limite, une superposition à amplitudes égales des petits écarts du paramètre d'ordre en phase et en module. Les résultats (102) et (106) sont représentés en trait plein vert sur la figure 7 pour une valeur très faible de Δ/μ , ce qui les rend fort proches du résultat exact à nombre d'onde réduit \check{q} pas trop petit.

25. Nous avons utilisé le résultat BCS $\check{\Delta} \sim 8e^{-2}e^{-\pi/2k_F|a|}$ lorsque $k_F a \rightarrow 0^-$ et remplacé k_0 par sa limite k_F .

4.6.3. Au voisinage du minimum de pulsation propre : l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$

Notre motivation pour aller au-delà des sections 4.6.1 et 4.6.2 a été de comprendre l'origine du minimum absolu que l'on voit fort bien dans la partie réelle de la branche du continuum sur la figure 5a, en régime de couplage faible $\check{\Delta} \ll 1$. En particulier, ce minimum n'apparaît pas du tout dans la relation de dispersion limite $\check{q} \mapsto \check{z}_q^{(0)}$ obtenue pour $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\check{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ fixé dans la section 3.4 (voir la courbe noire sur la figure 5a), à notre insatisfaction. Ceci nous a conduits à la découverte de l'échelle de nombre d'onde non triviale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, comme nous l'exposons ici.

La première idée pour rendre compte du minimum en $\check{q} = \check{q}_{\min}$ non nul sur la figure 5a est d'aller à l'ordre suivant en le petit paramètre $\check{\Delta}$. À \check{q} et à $\check{z} = z/\Delta$ fixés, nous poursuivons donc le développement des éléments de matrice de \check{M} , à l'ordre un sur le couplage phase-module et à l'ordre deux sur le couplage module-module :

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{z} \text{ et } \check{q} \text{ fixés}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \check{M}_{--}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + \check{M}_{--}^{(1)}(\check{z}, \check{q}) + o(\check{\Delta}^2) \quad \text{et} \quad \check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{z} \text{ et } \check{q} \text{ fixés}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \check{M}_{+-}^{(1)}(\check{z}, \check{q}) + o(\check{\Delta}) \quad (108)$$

L'ordre zéro figure, sous forme intégrale non adimensionnée, dans l'équation (31). Le reste du calcul, un peu long, repose sur les représentations intégrales (50,55). Donnons-en le résultat, explicite :²⁶

$$\check{M}_{+-}^{(1)}(\check{z}, \check{q}) = \frac{\pi \check{\Delta} \check{z}}{2(2\pi)^3} \left[\ln \frac{\check{\Delta}}{8e} + \phi(\check{z}, \check{q}) \right] \quad \text{avec} \quad \phi(\check{z}, \check{q}) \equiv \frac{(4 + \check{q}^2 - \check{z}^2)^{1/2}}{(\check{z}^2 - \check{q}^2)^{1/2}} \arccos \frac{(4 + \check{q}^2 - \check{z}^2)^{1/2}}{2} \quad (109)$$

$$\check{M}_{--}^{(2)}(\check{z}, \check{q}) = -\frac{\pi \check{\Delta}^2}{16(2\pi)^3} \left[(\check{q}^2 + \check{z}^2 - 4) \ln \frac{\check{\Delta} e^{1/2}}{8} - \frac{\check{q}^2(\check{q}^4 + (4 - \check{z}^2)\check{q}^2 + 8\check{z}^2)}{(\check{z}^2 - \check{q}^2)^2} + \frac{\check{z}^6 - (4 + \check{q}^2)\check{z}^4 + \check{q}^2(16 - \check{q}^2)\check{z}^2 + \check{q}^6}{(\check{z}^2 - \check{q}^2)^2} \phi(\check{z}, \check{q}) \right] \quad (110)$$

On notera l'apparition de termes logarithmiques en $\check{\Delta}$, et le fait que la fonction $\phi(\check{z}, \check{q})$, introduite pour alléger l'écriture, n'a, en fonction de la variable \check{z} , pas de ligne de coupure sur l'intervalle $[\check{e}_1, \check{e}_2^{(0)}] = [2, (4 + \check{q}^2)^{1/2}]$, si bien que la correction du premier ordre à M_{+-} et du second ordre à M_{--} y sont analytiques et leur prolongement de type II au demi-plan complexe inférieur est tout fait, $\check{M}_{+-\downarrow}^{(1)}(\check{z}, \check{q}) = \check{M}_{+-}^{(1)}(\check{z}, \check{q})$ et $\check{M}_{--\downarrow}^{(2)}(\check{z}, \check{q}) = \check{M}_{--}^{(2)}(\check{z}, \check{q})$. Pour le couplage phase-phase, il ne sera pas utile d'aller au-delà de l'ordre zéro, déjà donné sous la forme intégrale (33). Bien que le couplage phase-module soit du premier ordre en $\check{\Delta}$, il apparaît au carré dans l'équation aux énergies propres (76) ; la première correction à l'énergie propre est donc du second ordre :

$$\check{z}_q \stackrel{\check{q} \text{ fixé}}{\check{\Delta} \rightarrow 0} \check{z}_q^{(0)} + \check{z}_q^{(2)} + o(\check{\Delta}^2) \quad \text{avec} \quad \left[\frac{\check{z}_q^{(2)}}{\check{z}_q^{(0)}} + \check{M}_{--}^{(2)}(\check{z}_q^{(0)}, \check{q}) \right] \check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\check{z}_q^{(0)}, \check{q}) = [\check{M}_{+-}^{(1)}(\check{z}_q^{(0)}, \check{q})]^2 \quad (111)$$

Pour obtenir cette expression, il a suffi de remplacer dans (76) M_{+-} et M_{++} par leur comportement dominant pris en l'énergie non perturbée (après prolongement analytique de type II pour M_{++}) ; dans le terme du second ordre de M_{--} , voir (108), on a pu procéder de même, mais dans la contribution d'ordre zéro (après prolongement analytique de type II), il a fallu faire un développement de Taylor du premier ordre :

$$\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\check{z}_q, \check{q}) = \check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\check{z}_q^{(0)}, \check{q}) + (\check{z}_q - \check{z}_q^{(0)}) \frac{d}{d\check{z}} \check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\check{z}_q^{(0)}, \check{q}) + \dots \quad (112)$$

puis utiliser les relations (34,94). En d'autres termes, la première correction à la relation de dispersion universelle $\check{q} \mapsto \check{z}_q^{(0)}$ de la limite de couplage faible résulte de deux effets physiques, *a priori* de même importance : (i) l'effet

26. Pour calculer $\check{M}_{+-}^{(1)}$, on coupe dans (50) adimensionnée le domaine d'intégration en deux sous-intervalles $I_< = [\check{e}_2(\check{q}), \eta]$ et $I_> = [\eta, +\infty[$ où $\eta \ll 1$ est fixé. Sur le premier, on développe l'intégrande en puissances de $\check{\Delta}$ à $\check{e} = \check{e}/\check{\Delta}$ fixé. Sur le deuxième, on développe à \check{e} fixé. Pour cela, il faut développer les racines s_1 et s_2 de (71). Sur $I_<$, $s_{1,2} \simeq \mp s_0 - A\check{\Delta}$ avec $s_0^2 = \check{e}^2(\check{e}^2 - 4 - \check{q}^2)/[(\check{e}^2 - 4)(\check{e}^2 - \check{q}^2)]$ et $A = \check{e}^2\check{q}^2/[(\check{e}^2 - 4)^{1/2}(\check{e}^2 - \check{q}^2)^2]$ si bien que $\check{\rho}_{+-} \sim \frac{\pi}{4}\check{\Delta}\check{e}(\check{e}^2 - 4 - \check{q}^2)^{1/2}/(\check{e}^2 - \check{q}^2)^{1/2}$. Sur $I_>$, $s_{1,2} \simeq \mp 1 - \check{q}^2\check{\Delta}^4(\check{e} \mp 2)/\check{e}^4$ d'où $\check{\rho}_{+-} \sim \frac{\pi}{2}[(1 + \check{e}/2)^{1/2} - \Theta(2 - \check{e})(1 - \check{e}/2)^{1/2}]$. L'intégration sur l'énergie fait apparaître des termes formellement divergents de la forme $\check{\Delta} \ln \eta$, qui se compensent exactement entre les parties haute et basse, et l'on obtient (109). Le calcul de $\check{M}_{--}^{(2)}$ procède de même, à partir de la forme astucieuse (55), mais il est plus lourd : (i) il faut ajouter le sous-intervalle $[\check{e}_1, \check{e}_2(\check{q})]$, sur lequel il n'y a cependant aucun écart à la densité spectrale $\rho_{--}^{(0)\text{III}}$ de la table 1, (ii) sur $I_<$, il faut développer $s_{1,2}$ jusqu'à l'ordre $\check{\Delta}^2$, pour obtenir $\check{\rho}_{--} - \check{\rho}_{--}^{(0)\text{III}} \sim -\frac{\pi}{32}\check{\Delta}^2(\check{e}^2 - 4 - \check{q}^2)^{1/2}[\check{e}^6 - (4 + \check{q}^2)\check{e}^4 - \check{q}^2(\check{q}^2 - 16)\check{e}^2 + \check{q}^6]/(\check{e}^2 - \check{q}^2)^{5/2}$, (iii) sur $I_>$, il faut développer $s_{1,2}$ jusqu'à l'ordre $\check{\Delta}^6$ pour obtenir $\check{\rho}_{--} = \frac{\pi}{2}[(1 + \check{e}/2)^{1/2} + \Theta(2 - \check{e})(1 - \check{e}/2)^{1/2}] - \frac{\pi\check{\Delta}^2}{32\sqrt{2}\check{e}^2} \left[\frac{\check{q}^2\check{e}^2 + 48\check{e} + 64}{(2 + \check{e})^{1/2}} + \Theta(2 - \check{e}) \frac{\check{q}^2\check{e}^2 - 48\check{e} + 64}{(2 - \check{e})^{1/2}} \right] + O(\check{\Delta}^4)$.

du couplage phase-module, totalement ignoré dans la section 3.4, et (ii) une correction à l'équation dans la voie de module, c'est-à-dire au couplage module-module, également omise.

Analysons le résultat (111) dans des cas limites simples. À faible \bar{q} , la contribution dominante à la correction en énergie est quadratique en nombre d'onde et provient du couplage phase-module, celle provenant de $M_{--}^{(2)}$ étant seulement cubique. On trouve ainsi

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \Big|_{M_{+-}^{(1)}} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\check{\Delta}^2 \bar{q}^2}{2\pi^2} \frac{\xi_0^2}{\zeta_0 - 1} \left(\ln \frac{\check{\Delta}}{8e} \right)^2 \quad (113)$$

ce qui reproduit le terme d'ordre $\check{\Delta}^2$ du coefficient de départ quadratique de la branche du continuum, voir (86). À grand \bar{q} , le calcul est simple quand on dispose d'expressions explicites, et l'on obtient à l'ordre dominant en \bar{q} :

$$\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} -\frac{i\pi\check{\Delta}Y_0\bar{q}}{2(2\pi)^3} \ln \frac{\check{\Delta}\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}}{8e} \text{ et } \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} -\frac{\pi\check{\Delta}^2\bar{q}^2(1-Y_0^2)}{16(2\pi)^3} \left\{ \pi \ln \check{\Delta} + \ln \left[\frac{\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}e^{1/2}}{8} \right] - (1-Y_0^4)^{-1} \right\} \quad (114)$$

où Y_0 est donné par (44). Le calcul est plus laborieux sur les formes intégrales : en $\bar{z} \approx \bar{q} \approx \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, les éléments de matrice d'ordre zéro $\check{M}_{++}^{(0)}$ et $\check{M}_{--}^{(0)}$ se comportent de la même façon à l'ordre dominant en \bar{q} ,²⁷ donc à cet ordre s'annulent tous les deux lorsque $\bar{z} = \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$: on travaille beaucoup pour un résultat nul... Il est donc astucieux de travailler directement sur la différence entre (33) et (31), en posant $\check{D}(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \check{M}_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$. Alors, après prolongement analytique et toujours à l'ordre dominant en \bar{q} ,²⁸ on obtient en termes de la fonction de Bose $g_2(z)$:

$$\check{D}_{\downarrow}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} \frac{8\pi}{(2\pi)^3 Y_0 \bar{q}^2} \left\{ \pi \ln(-2i\bar{q}Y_0) - \ln[\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}] \operatorname{atan}\left(\frac{1}{Y_0}\right) - \operatorname{Im} g_2\left(\frac{1}{iY_0}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} g_2\left(\frac{2}{iY_0+1}\right) \right\} \quad (115)$$

Le comportement du résidu $\check{Z}_{-}^{(0)}$ à grand nombre d'onde figure dans (96). On déduit de tout cela qu'à nouveau, le couplage phase-module apporte la correction dominante d'ordre $\check{\Delta}^2$ à la branche du continuum et l'on peut garder

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} \check{Z}_{-}^{(0)} \frac{[\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q})]^2}{\check{D}_{\downarrow}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})} \approx \check{\Delta}^2 \bar{q}^5 \quad (116)$$

Aux nombres d'onde intermédiaires, $\bar{q} \approx 1$, il se trouve que la contribution du couplage phase-module à $\operatorname{Re} \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)}$ dans (111) s'annule, le point d'annulation dépendant peu de $\check{\Delta}$ et restant proche de $\bar{q} = 5$ pour les paramètres de la figure 5a. La contribution de $M_{--}^{(2)}$ à cette observable n'est alors certes plus négligeable devant celle de $M_{+-}^{(1)}$ mais elle reste petite en valeur absolue, et on peut l'ignorer en pratique ; ceci explique pourquoi les différentes courbes en trait plein (y compris la courbe limite noire) semblent se croiser en $\bar{q} \approx 5$ sur la figure.

Comme on peut en juger sur la figure 5a, en comparant les courbes tiretées à celles en trait plein, le calcul (111) de $\bar{z}_{\bar{q}}$ au second ordre en $\check{\Delta}$ rend compte de l'existence d'un minimum sur $\operatorname{Re} z_{\bar{q}}$, mais de manière plus qualitative que quantitative. Il échoue en particulier à bien décrire la remontée de la courbe au-delà du minimum, l'accord avec les résultats numériques dans cette zone ne s'améliorant pas à couplage très faible. Le problème vient de l'approximation $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}, \bar{q}) \approx \check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})$ faite dans l'équation (111). En effet, comme nous l'avons dit, $\check{M}_{++}^{(0)}$ et $\check{M}_{--}^{(0)}$ évalués en $\bar{z} \approx \bar{q}$ sont équivalents et d'ordre $\approx \bar{q}^0$ à grand \bar{q} ; comme $\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}$ s'annule par construction en $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}$ est en ce point anormalement faible, c'est-à-dire d'ordre \bar{q}^{-2} comme on le lit sur (115), plutôt que d'ordre \bar{q}^0 comme on aurait pu s'y attendre. Il faut dans ce cas écrire $\check{M}_{++\downarrow} = \check{D}_{\downarrow} + \check{M}_{--\downarrow}$, approximer la petite contribution \check{D}_{\downarrow} par sa valeur en $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ mais effectuer sur le bout restant $M_{--\downarrow}$ le même développement de Taylor que dans l'équation (112). Nous pouvons aussi omettre la correction $M_{--}^{(2)}$, que nous avons montré dans le paragraphe précédent être très petite à \bar{q} quelconque et même sous-dominante à grand \bar{q} . Nous remplaçons en définitive l'équation du premier degré (111) par une équation

27. Après prolongement analytique, ils sont tous deux équivalents à un facteur constant près à $\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q})$, comme dans (40).

28. On tombe sur des intégrales comme celles I et J de la note 9, que l'on traite de la même façon.

du second degré (trinômiale) sur \bar{z}_q , d'où la notation « trin » en exposant :²⁹

$$\frac{(\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)})}{\bar{Z}_-^{(0)}} \left[\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} + \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) \right] = [\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})]^2 \quad (117)$$

La bonne solution de l'équation s'écrit

$$\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} = -\frac{1}{2}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + \eta \left[\frac{1}{4}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2} \quad (118)$$

où le signe η est celui de $\text{Re } \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})$, positif pour \bar{q} assez grand, négatif pour \bar{q} assez petit. La prédiction correspondante, représentée en pointillé sur la figure 5a, est en bon accord avec les résultats exacts, un accord d'autant meilleur que $\check{\Delta}$ est plus faible, même dans la remontée au-delà du minimum. Lorsqu'on s'éloigne du minimum dans le sens des \bar{q} croissants, la contribution de \check{D}_\downarrow dans (118) devient de plus en plus négligeable et la remontée prend la forme simple³⁰

$$\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} \Big|_{\bar{q} \gg \bar{q}_{\min}} = -\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) - \frac{1}{2}\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + \dots \quad (119)$$

Lorsqu'on s'éloigne du minimum dans le sens des \bar{q} décroissants, la contribution de \check{D}_\downarrow devient dominante et (117) se réduit au développement (111) (à l'omission près de $\check{M}_-^{(2)}$), qui n'est donc rétrospectivement applicable qu'à $\bar{q} \ll \bar{q}_{\min}$. Pour être complets, donnons l'expression tirée de (117) des résidus dans les voies de phase et de module,³¹ ainsi que du déphasage dans la superposition de ces deux voies maximisant le résidu global :

$$\theta^{\text{trin}} = \arg \left(\frac{-\bar{Z}_-^{(0)} \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})}{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}} \right) \quad \text{et} \quad \bar{Z}_\pm^{\text{trin}} = \frac{1}{2} \bar{Z}_-^{(0)} \mp \eta \frac{\bar{Z}_-^{(0)} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})/4}{\left[\frac{1}{4} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2}} \quad (120)$$

Passons maintenant à l'étude approfondie de la partie réelle de la branche du continuum au voisinage de son minimum en $q = q_{\min} > 0$ dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$. Pour cela, il faut d'abord déterminer la loi d'échelle de q_{\min} . Une première façon de faire est de dire que $\bar{z}_q^{(0)} \approx \bar{z}_q^{(2)}$ en $q = q_{\min}$, ce qui, compte tenu de (43) et de (116), conduit à $\bar{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{-1/3}$ donc à $\check{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, ce qui est l'échelle de nombre d'onde inattendue annoncée dans le titre de la présente section 4.6.3. Une seconde façon est d'exiger que $\check{D}_\downarrow \approx \check{M}_{+-}^{(1)}$ dans l'expression entre crochets de (118), ce qui, compte tenu de (114) et (115), conduit au même résultat. Nous en déduisons que $\text{Re } \bar{z}_{q_{\min}} \approx \check{\Delta}^{1/3}$ ou encore $\text{Re } \check{z}_{q_{\min}} \approx \check{\Delta}^{4/3}$. L'adimensionnement de la relation de dispersion adapté à la nouvelle échelle sera indiqué par un chapeau. Posons donc d'abord $\check{q} = \check{\Delta}^{2/3} \hat{q}$, c'est-à-dire $\bar{q} = 2\check{\Delta}^{-1/3} \hat{q}$. Obtenons ensuite l'expression de la partie réelle de la branche ainsi adimensionnée à l'ordre dominant dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à \hat{q} fixé, en travaillant un peu sur (117) :³²

$$\text{Re } \check{z}_{\hat{q}} \stackrel{\hat{q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\approx}} \check{\Delta}^{4/3} \left[\text{Re } \hat{z}_{\hat{q}}^{(0)} + o(1) \right] \quad \text{avec} \quad \text{Re } \hat{z}_{\hat{q}}^{(0)} = -\frac{(2\pi)^2 \check{\Delta}^{-1/3}}{\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0} \text{Im} \left[\frac{1}{4} \check{D}_\downarrow^{\text{asympt}}(\hat{z}_{\hat{q}}^{(0)}, \hat{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1), \text{asympt}}(\hat{z}_{\hat{q}}^{(0)}, \hat{q})^2 \right]^{1/2} \quad (121)$$

où $\check{D}_\downarrow(\hat{z}_{\hat{q}}^{(0)}, \hat{q})$ et $\check{M}_{+-}^{(1)}(\hat{z}_{\hat{q}}^{(0)}, \hat{q})$ ont été remplacés par leur ordre dominant (115) et (114) à grand \bar{q} , comme il a fallu le faire aussi pour $\bar{Z}_-^{(0)}$ au moyen de (96), et comme l'indique l'exposant « asympt ». La dépendance en nombre d'onde du

29. En anticipant la loi $\bar{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{-1/3}$, on vérifie au voisinage du minimum que les parties imaginaires des deux termes entre crochets dans (117) sont effectivement du même ordre de grandeur $\approx 1/\bar{q}_{\min}^2$; il faut bien considérer ici leur partie imaginaire car nous voulons accéder à la partie réelle de $(\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)})$ en préfacteur des crochets ; or le résidu au dénominateur de ce préfacteur est imaginaire pur à l'ordre dominant en \bar{q} et le second membre de (117) est réel.

30. Il y a un signe – devant le terme $\check{M}_{+-}^{(1)}$ dans (119) car, pour $1 \ll \bar{q} \ll 1/\check{\Delta}$, sa partie imaginaire est positive, son carré est négatif et $\text{Im}(\check{D}_\downarrow^2) < 0$.

31. On obtient la dérivée du déterminant de M prolongé analytiquement en dérivant le premier membre de (117) par rapport à \bar{z}_q^{trin} ; le second membre, constant, donne une contribution nulle.

32. Une simplification importante vient du fait qu'à l'ordre dominant en \bar{q} , $\text{Re } \bar{z}_q^{(0)} = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{Z}_-^{(0)} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})]$.

résultat (121) reste malheureusement assez obscure, puisque Y_0 dans (44) n'a pas de dépendance simple en \bar{q} .³³ Pour progresser, faisons le changement de variable astucieux

$$\hat{q} \equiv \frac{\pi\kappa}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \equiv \check{\Delta}^{2/3} \quad (122)$$

puis faisons tendre ε vers zéro à κ fixé dans (121). L'ordre dominant en $|\ln \varepsilon|$ est simple à calculer,³⁴

$$\operatorname{Re} \check{z}_{\hat{q}}^{(0)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\overset{\kappa \text{ fixé}}{\sim}} \begin{cases} \frac{2\pi}{|\ln \varepsilon|^{1/3}} \frac{1}{(4\kappa^2 - \kappa^8)^{1/2}} & \text{si } \kappa < 2^{1/3} \\ \frac{|\ln \varepsilon|^{2/3} (\kappa^6 - 4)^{1/2}}{2\kappa} & \text{si } \kappa > 2^{1/3} \end{cases} \quad (123)$$

et atteint son minimum en $\kappa = 1$. Après retour aux variables adimensionnées originelles (58), il conduit aux très beaux équivalents

$$\check{q}_{\min} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi\varepsilon}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \check{z}_{q_{\min}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\pi\varepsilon^2}{3^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/3}} \quad (124)$$

représentés en trait plein sur la figure 6, et qui sont déjà assez proches des valeurs exactes (symboles). Nous avons poussé le calcul jusqu'à l'ordre sous-sous-dominant dans (121), le petit paramètre du développement étant $1/|\ln \varepsilon|$:³⁵

$$\check{q}_{\min} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\pi\varepsilon}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \left[\frac{c_1 + (c_1^2 - c_2) |\ln \varepsilon|^{-1}}{c_1 - c_2 |\ln \varepsilon|^{-1}} + O(w^\alpha |\ln \varepsilon|^{-3}) \right] \quad (125)$$

$$\operatorname{Re} \check{z}_{q_{\min}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2\pi\varepsilon^2}{3^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/3}} \left[\frac{1}{1 - d_1 |\ln \varepsilon|^{-1} + (d_1^2 - d_2) |\ln \varepsilon|^{-2}} + O(w^\alpha |\ln \varepsilon|^{-3}) \right] \quad (126)$$

où l'on a introduit $w = \ln(2 |\ln \varepsilon|^{1/3})$, des coefficients c_n et d_n fonctions de w ,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{19}{24} - \frac{1}{3}w & c_2 &= \frac{959}{1152} + \frac{5\pi^2}{18} + 2 \ln 2 + 4 \ln^2 2 + \left(\frac{5}{12} - 4 \ln 2\right)w + \frac{8}{9}w^2 \\ d_1 &= 3 + 2 \ln 2 - \frac{5}{3}w & d_2 &= \frac{1223}{144} - \frac{2\pi^2}{9} + 12 \ln 2 - \left(\frac{115}{9} + \frac{10}{3} \ln 2\right)w + \frac{23}{9}w^2 \end{aligned} \quad (127)$$

et on laisse l'exposant α dans les termes d'erreur indéterminé. Bien entendu, ces coefficients sont ceux du développement en puissances de $|\ln \varepsilon|^{-1}$ des expressions entre crochets dans (125,126), mais nous avons préféré écrire le résultat sous une forme de Padé (1,1) ou (0,2) car ceci améliore grandement la vitesse de convergence en $|\ln \varepsilon|^{-1}$: les lignes tiretées dans la figure 6 collent déjà très bien aux résultats numériques pour des valeurs modestes de μ/Δ .

Pour terminer, il faut vérifier que, dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$, aucune échelle de nombre d'onde de la branche du continuum n'a été oubliée entre la nouvelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ et l'ancienne $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$.³⁶ Analytiquement, nous tirons de (119), limitée au premier terme dans son second membre, que $\operatorname{Re} \check{z}_{\hat{q}}^{(0)} \sim \check{\zeta}_1 \hat{q}^2$ aux nombres d'onde grands devant la nouvelle échelle, $\check{q} \gg \check{\Delta}^{2/3}$ autrement dit $\hat{q} \gg 1$, où $\check{\zeta}_1$ est exactement le même coefficient que dans le développement (103) de $\operatorname{Re} \check{z}_{\check{q}}^{(0)}$ aux nombres d'onde faibles devant l'ancienne échelle, $\check{q} \ll \check{\Delta}^0$: le raccordement est parfait. Numériquement, nous avons produit la figure 7 de synthèse, assez mathématique compte tenu de la valeur très faible de $\check{\Delta}$ choisie, mais qui montre comment la prédiction (117) sur \bar{z}_q et ses prédictions dérivées (120) sur les résidus et le déphasage phase-module optimal interpolent magnifiquement entre les prédictions à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}$ de la section 4.6.1 et celles à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ de la section 4.6.2, toutes collant de très près aux résultats numériques dans leur régime de validité.

33. En revanche, on sait exprimer \bar{q} en fonction de Y_0 , et (121) admet une forme explicite compliquée en Y_0 .

34. Donnons aussi $\operatorname{Im} \check{z}_{\hat{q}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\overset{\kappa \text{ fixé}}{\sim}} -\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/3} \kappa$, tiré de (117) et en accord avec (43,44) puisqu'à cet ordre $\operatorname{Im} \check{z}_q^{\text{trin}}$ est dominé par $\operatorname{Im} \check{z}_{\hat{q}}^{(0)}$. Ceci signifie qu'à l'ordre dominant, $\check{z}_{\hat{q}}$ est imaginaire pur d'ordre ε^{-1} . L'erreur relative dans ces expressions, y compris (123), est un $O((\ln |\ln \varepsilon|)^\alpha / |\ln \varepsilon|)$, où la valeur de l'exposant α importe peu.

35. Posons $x = |\ln \varepsilon|^{-1/3} \rightarrow 0$ et $\eta = \ln(\kappa/x)$. Du développement $\pi Y_0 = \frac{1}{2x^3} + \eta + 2\eta x^3 + O(\eta^2 x^6)$ nous tirons pour $\kappa < 2^{1/3}$: $\operatorname{Re} \check{z}_{\hat{q}}^{(0)} = \frac{2\pi x}{\kappa(4-\kappa^6)^{1/2}} \left[1 + \frac{x^3}{4-\kappa^6} (b_0 + b_6 \kappa^6) + \frac{x^6}{(4-\kappa^6)^2} (c_0 + c_6 \kappa^6 + c_{12} \kappa^{12}) + O(x^9 \eta^3) \right]$ avec $b_0 = 8(1 - \eta)$, $b_6 = 1 + \ln 2 + 3\eta$, $c_0 = 64(1 - 3\eta + \eta^2)$, $c_6 = 34 - 2\pi^2 + 4 \ln 2 - 6 \ln^2 2 + 4(25 + 7 \ln 2)\eta - 46\eta^2$ et $c_{12} = 1 + 8 \ln 2 + 3 \ln^2 2 - 4(1 + \ln 2)\eta + 9\eta^2$.

36. Nous avons déjà vu comment (117) se raccorde à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}$. En effet, si $\check{q} \approx \check{\Delta}$, on a $\check{q} \ll \check{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{2/3}$. Or, comme il est dit après (119), l'équation (117) pour $\check{q} \ll \check{q}_{\min}$ se réduit essentiellement à (111), donc donne le bon comportement de \bar{z}_q à $\check{q} \approx \check{\Delta}$.

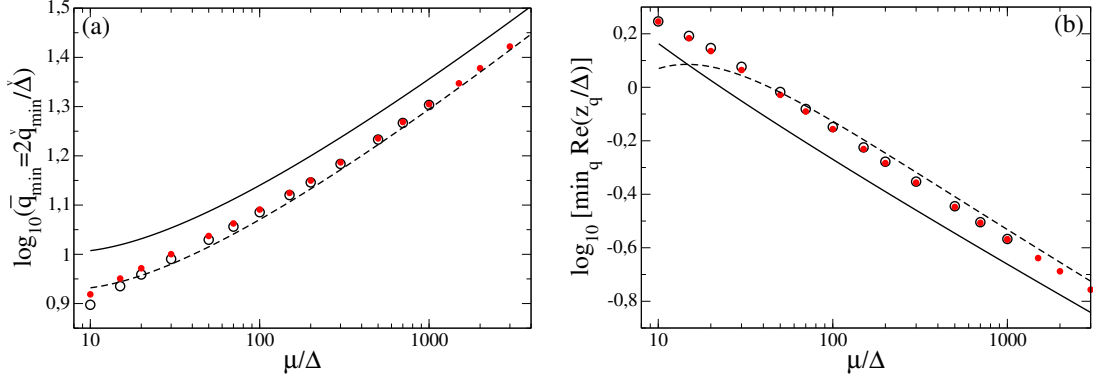


FIGURE 6: Pour des interactions de portée nulle (cas des atomes froids) en régime de couplage faible, position q_{\min} (a) et valeur $\text{Re } z_{q_{\min}}$ (b) du minimum de la partie réelle de la branche du continuum $q \mapsto \text{Re } z_q$ pour un prolongement analytique de type II, en fonction de l'inverse du paramètre d'ordre. Cercles noirs : valeurs exactes issues d'une résolution numérique de l'équation (76). Disques rouges : prédictions de l'équation du second degré (118) sur z_q . Trait plein noir : équivalents asymptotiques (124). Tireté noir : approximants de Padé (125) et (126). Ces deux derniers éléments relèvent de l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^{2/3}$.

4.7. La branche du continuum pour $\Delta/\mu \gg 1$

Au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique, du côté positif, nous trouvons que la branche du continuum (pour un prolongement analytique de type II) présente deux échelles de variation en nombre d'onde, celle $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^0$ fixée par la largeur de l'intervalle d'existence de la branche (section 4.7.1) et celle $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ requise par l'approximation quadratique (82) de la branche (section 4.7.2). Ces deux régimes se raccordant parfaitement comme nous le verrons, il n'y a pas d'autre échelle de nombre d'onde à considérer.

4.7.1. À l'échelle de nombre d'onde $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^0$

Nous faisons tendre ici $\check{\Delta}$ vers $+\infty$ à nombre d'onde réduit $\check{\eta}$ fixé, en postulant un écart de limite finie et non nulle de la branche au bord du continuum de paire brisée :

$$\check{z}_q - 2\check{\Delta} \equiv \check{Z}_{\check{\eta}}^{\check{\eta} \text{ fixé}} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx} \check{\Delta}^0 \quad (128)$$

comme le suggèrent les résultats numériques de la figure 4 et l'approximation quadratique (82,86) écrite à la limite (91) de son domaine de validité. Pour obtenir un équivalent des éléments de matrice de \check{M} , nous revenons à leur formulation intégrale (7,8) dans l'espace des vecteurs d'onde relatifs \mathbf{k} de la paire brisée, avec le domaine d'intégration \mathcal{D} remplacé par \mathbb{R}^3 bien entendu. Nous pouvons identifier *a priori* trois échelles naturelles d'énergie $\epsilon_{\mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2} \approx \epsilon_{\mathbf{k}}$ dans ces intégrales, donc trois échelles de nombre d'onde \check{k} :

$$(a) : \check{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \check{\Delta} \approx \check{\Delta}^{-1} \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^0 \quad ; \quad (b) : \check{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \check{\Delta} \approx \check{\Delta}^0 \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^{1/4} \quad ; \quad (c) : \check{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \check{\Delta} \approx \check{\Delta} \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^{1/2} \quad (129)$$

et trois changements de variable correspondants

$$\check{k} = \check{\Delta}^0 \check{K}_a = \check{\Delta}^{1/4} \check{K}_b = \check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c \quad (130)$$

Pour obtenir la contribution dominante aux intégrales de la première (a), de la deuxième (b) ou de la troisième échelle (c), il faut faire tendre $\check{\Delta}$ vers $+\infty$ dans l'intégrande à valeur fixée de \check{K}_a , \check{K}_b ou \check{K}_c . Dans \check{M}_{ss} , l'échelle (b) domine et l'on fixe \check{K}_b ; dans le couplage phase-module, c'est la troisième (c) qui l'emporte et l'on fixe \check{K}_c . On obtient ainsi les

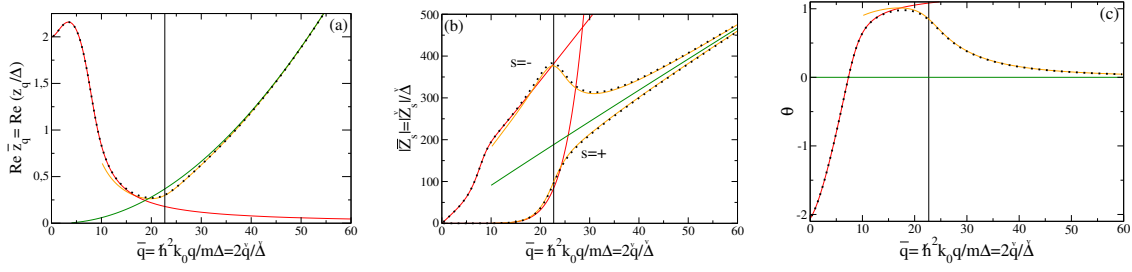


FIGURE 7: Pour un gaz de fermions en interaction de portée nulle dans la limite $\check{\Delta} = \Delta/\mu \rightarrow 0$, illustration de l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ et de son raccordement avec les échelles $\check{q} \approx \check{\Delta}$ et $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ sur (a) la partie réelle de la relation de dispersion du mode du continuum de type II, (b) les poids spectraux du mode dans les voies de phase + et de module - des écarts à l'équilibre du paramètre d'ordre et (c) le déphasage θ entre les deux voies maximisant le poids spectral du mode selon l'équation (79). Gros pointillé noir : solution numérique de l'équation (76) et son report dans la définition de Z_{\pm} après (77) et dans (80). Trait plein rouge : ordre dominant en $\check{\Delta}$ à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\check{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ fixé), à savoir la solution numérique de l'équation (34) et son insertion dans les expressions (94) et (97). Trait plein vert : ordre dominant en $\check{\Delta}$ à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\check{q} = q/k_0$ fixé), à savoir les expressions (102) et (106). Trait plein orange : ordre dominant en $\check{\Delta}$ à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ à κ fixé dans le changement de variable (122)), à savoir les expressions (121) et (120) dans lesquelles on a écrit les coefficients à l'ordre dominant en $\check{\Delta}$ comme dans les équations (96), (114) et (115). Trait vertical fin : nombre d'onde au centre de l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, c'est-à-dire valeur de \check{q} pour laquelle $\kappa = 1$. On a pris $\check{\Delta} = 1/1000$.

équivalents

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z}=\check{z}-2\check{\Delta} \text{ fixé}} \check{\Delta}^{3/4} \int_0^{+\infty} d\check{K}_b \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_b^2}{\check{Z} - \check{K}_b^4} = -\frac{(-\check{Z})^{-1/4} \check{\Delta}^{3/4}}{8\pi \sqrt{2}} \quad (131)$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z}=\check{z}-2\check{\Delta} \text{ fixé}} \check{\Delta}^{-1/4} \int_0^{+\infty} d\check{K}_b \frac{(2\pi)^{-2} \check{Z} \check{K}_b^2}{\check{Z} - \check{K}_b^4} = \frac{(-\check{Z})^{3/4} \check{\Delta}^{-1/4}}{8\pi \sqrt{2}} \quad (132)$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z}=\check{z}-2\check{\Delta} \text{ fixé}} \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K}_c \frac{-(2\pi)^{-2}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2 \check{\Delta}^{1/2}}{\pi^{5/2}} \quad (133)$$

où la valeur explicite des intégrales est donnée pour $\text{Im } \check{Z} < 0$, sous une forme adaptée au cas à venir, $\text{Im } \check{Z} \rightarrow 0^-$ à $\text{Re } \check{Z} < 0$ fixée. Afin d'utiliser la procédure de Nozières (12), on développe directement les densités spectrales non nulles de type II dans la table 2,

$$\check{\rho}_{++}^{(III)}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z}=\check{z}-2\check{\Delta} \text{ fixé}} \frac{\pi^2 \check{\Delta}}{2\check{q}} \left[1 + \frac{\check{Z}}{4\check{\Delta}} + O\left(\frac{1}{\check{\Delta}^2}\right) \right] \quad \text{et} \quad \check{\rho}_{--}^{(III)}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z}=\check{z}-2\check{\Delta} \text{ fixé}} \frac{\pi^2 \check{Z}}{4\check{q}} \left[1 - \frac{\check{Z}}{8\check{\Delta}} + O\left(\frac{1}{\check{\Delta}^2}\right) \right] \quad (134)$$

On constate alors que les éléments de matrice \check{M}_{ss} sont dominés par le terme de Nozières effectuant le prolongement analytique, plus grand par un facteur $\check{\Delta}^{1/4}$. Ceci est troublant et laisse pressentir un mode du continuum fort éloigné de l'axe des énergies expérimentalement accessible $\text{Im } z = 0^+$ donc sans grand sens physique. La résolution à l'ordre dominant de l'équation aux énergies propres donne

$$\check{Z}_{\check{q}} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{q} \text{ fixé}} - \frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (135)$$

La partie réelle de l'énergie du mode se trouve donc effectivement en dehors de l'intervalle $[2\Delta, \epsilon_2(q)]$ par lequel s'effectue le prolongement analytique, qui est aussi l'intervalle d'observabilité dans les fonctions de réponse du système, au sens de la section 4.3 (l'énergie $\epsilon_2(q)$ est donnée ici par (63)). Faut-il le rappeler, le mode n'est pas réellement dans la bande interdite physique $[0, 2\Delta]$ même si sa partie réelle s'y trouve mathématiquement ; il en est séparé par le bout de la ligne de coupure originelle rabattue sur $]-\infty, 2\Delta]$ par la procédure (12) [3].

De manière remarquable, le résultat réel négatif (135) coïncide à l'ordre dominant avec l'approximation quadratique en \check{q} de la branche, voir les équations (82) et (86) : l'approximation quadratique est valable partout, et l'échelle de nombre d'onde infinitésimale pour \check{q} prédite par sa condition de validité (91) n'intervient pas. La situation change aux

ordres suivants, les deux échelles de nombre d'onde attendues apparaissent et la condition (91) prend tout son sens. Les calculs, assez techniques, sont rejetés dans l'Annexe B.1. Ils sont désormais multi-échelles : il faut inclure dans un même élément de matrice $\check{M}_{ss'}$ les échelles (b) et (c), ainsi que l'échelle intermédiaire, notée (bc), s'en déduisant par moyenne géométrique et requérant le changement de variable $\check{k} = \check{\Delta}^{3/8} \check{K}_{bc}$. En revanche, il n'est pas nécessaire de traiter à part l'échelle (a) à l'ordre où nous irons (erreur relative $O(1/\check{\Delta})$ sur $\check{M}_{ss'}$ et *in fine* sur $\check{Z}_{\check{q}}$). Voici le résultat :

$$\check{z}_{\check{q}} - 2\check{\Delta} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q} \text{ fixé}}{=}} a_0 + a_1 \check{\Delta}^{-1/4} + a_2 \check{\Delta}^{-2/4} + a_3 \check{\Delta}^{-3/4} + O(\check{\Delta}^{-1}) \quad (136)$$

avec

$$a_0 = -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (137)$$

$$a_1 = 16 \cdot 2^{1/4} (4 - 3i\sqrt{2}) \check{q}^{5/2} [\Gamma(5/4)]^3 / \pi^{19/4} \quad (138)$$

$$a_2 = [9\sqrt{2}\pi + 16i(18 + 9\pi - \pi^3)] \check{q}^3 [\Gamma(5/4)]^2 / (3\pi^{11/2}) \quad (139)$$

$$a_3 = \left\{ -96(2\sqrt{2} + 3i)\pi^3 + [2\sqrt{2}(112\pi^3 - 2256 - 303\pi) + i(312\pi^3 - 5760 - 585\pi)] \check{q}^2 \right\} \frac{\check{q}^{3/2} \Gamma(5/4)}{48 \cdot 2^{3/4} \pi^{21/4}} \quad (140)$$

Si on cherchait à utiliser (136) pour $\check{q} \rightarrow 0$, on retrouverait le terme dominant réel comme on l'a dit, mais pas le terme sous-dominant imaginaire pur du coefficient du départ quadratique dans (86), puisque a_2 ci-dessus tend vers zéro cubiquement en nombre d'onde. Sur la partie imaginaire de la relation de dispersion, qui varie à l'ordre dominant comme $\check{q}^{5/2}$, la plage de départ quadratique se réduit à zéro à grand $\check{\Delta}$, comme le prédisait (91), et on ne peut pas échanger les limites $\check{q} \rightarrow 0$ et $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$. Pour être complets, donnons un développement des résidus dans les voies de phase et de module, et du déphasage entre ces deux voies correspondant au résidu global maximal :

$$|\check{Z}_-| \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q} \text{ fixé}}{=}} 16\check{q} \left[1 - \frac{(2\pi)^{1/4} \check{q}^{1/2}}{2\Gamma(1/4)\check{\Delta}^{1/4}} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \right], \quad |\check{Z}_+| \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q} \text{ fixé}}{\sim}} \frac{4[\Gamma(1/4)]^4 \check{q}^3}{\pi^5 \check{\Delta}} \quad \text{et} \quad \theta + \frac{\pi}{2} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q} \text{ fixé}}{\sim}} -\frac{(\pi/2)^{1/4} \check{q}^{1/2}}{\Gamma(1/4)\check{\Delta}^{1/4}} \quad (141)$$

4.7.2. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$

Pour étudier la branche du continuum de type II aux nombres d'onde réduits $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique, nous posons $\check{q} = \check{Q}\check{\Delta}^{-1/2}$ et faisons tendre $\check{\Delta}$ vers plus l'infini à \check{Q} fixé. D'après (91), l'échelle de nombre d'onde considérée est celle de la limite de validité de l'approximation quadratique (82), que l'on peut donc utiliser pour trouver la loi d'échelle en énergie. D'après (86), le coefficient de \check{q}^2 dans (82) est d'ordre $\check{\Delta}^0$, si bien que $\check{z}_{\check{q}} - 2\check{\Delta} \approx \check{\Delta}^{-1}$ et il faut poser

$$\check{z} - 2\check{\Delta} \equiv \frac{\check{\zeta}}{\check{\Delta}} \quad (142)$$

Il reste à prendre la limite $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$ dans les éléments de matrice de $\check{M}(\check{z}, \check{q})$ à $\check{\zeta}$ et \check{Q} fixés. Nous procédons de la même façon que dans la section 4.7.1, en distinguant les trois échelles (129) de nombre d'onde dans l'intégrale sur le vecteur d'onde relatif \mathbf{k} de paire brisée. On trouve que les éléments diagonaux \check{M}_{ss} sont dominés par l'échelle de nombre d'onde (a), alors que le couplage phase-module \check{M}_{+-} est dominé par l'échelle (c) :

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \check{\Delta}^{+1} \int_0^{+\infty} d\check{K}_a \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_a^2}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} = \frac{-\check{\Delta}}{16\pi(-\check{\zeta})^{1/2}} \left[\left(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2}\right)^{1/2} + \left(1 - i(-\check{\zeta})^{1/2}\right)^{1/2} \right] \quad (143)$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \check{\Delta}^{-1} \int_0^{+\infty} d\check{K}_a \frac{(2\pi)^{-2} \check{\zeta} \check{K}_a^2}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} = \frac{(-\check{\zeta})^{1/2}}{16\pi\check{\Delta}} \left[\left(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2}\right)^{1/2} + \left(1 - i(-\check{\zeta})^{1/2}\right)^{1/2} \right] \quad (144)$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K}_c \frac{-(2\pi)^{-2}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} \quad (145)$$

où la forme explicite des intégrales est adaptée à $\check{\zeta}$ proche d'un réel strictement négatif. Le développement des densités spectrales utiles au prolongement analytique par l'intervalle II s'effectue directement à partir de la table 2 :

$$\check{\rho}_{++}^{\text{II}}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \frac{\pi^2 \check{\Delta}^{3/2}}{2\check{Q}} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad \text{et} \quad \check{\rho}_{--}^{\text{II}}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \frac{\pi^2 \check{\zeta} \check{\Delta}^{-1/2}}{4\check{Q}} + O(\check{\Delta}^{-5/2}) \quad (146)$$

Comme dans la section 4.7.1, les éléments de matrice diagonaux \check{M}_{ss} sont beaucoup plus petits que les densités spectrales, cette fois par un facteur $\approx \check{\Delta}^{1/2}$, et ne contribuent pas à l'ordre dominant aux valeurs analytiquement prolongées $\check{M}_{ss\downarrow}$. En résolvant l'équation aux énergies propres (76), nous trouvons l'équivalent

$$\check{\zeta}_Q \sim -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{Q}^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \check{z}_q - 2\check{\Delta} \frac{\check{Q}^{\text{fixé}}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} - \frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (147)$$

En première approximation, la relation de dispersion est réelle et coïncide avec son approximation quadratique, même pour $\check{Q} \gg 1$. Pour mettre fin à ce paradoxe, il faut calculer la première correction, d'ordre relatif $\check{\Delta}^{-1/2}$. Pour les éléments diagonaux $\check{M}_{ss\downarrow}$, les équations (143,144) suffisent. Pour les éléments non diagonaux, dans lesquels la densité spectrale $\rho_{+-}^{(II)}$ est identiquement nulle, il reste à déterminer l'ordre sous-dominant $\check{\Delta}^0$ de \check{M}_{+-} . Cette fois-ci, il faut ajouter la contribution de l'échelle (a) à celle de l'échelle (c). L'échelle (b) contribue indirectement, c'est-à-dire seulement sous la forme d'une coupure $\Lambda \check{\Delta}^{1/4}$ sur le nombre d'onde \check{k} , où Λ est une constante arbitraire strictement positive. C'est une coupure haute (ultraviolette) pour l'échelle (a), sans laquelle l'intégrale sur \check{K}_a divergerait à l'infini. C'est aussi une coupure basse (infrarouge) pour l'échelle (c), sans laquelle l'intégrale sur \check{K}_c du terme sous-dominant divergerait en zéro. À la limite $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$, l'échelle (b) recolle ainsi les deux morceaux sous-dominants d'une manière indépendante de Λ et l'on trouve la correction cherchée à (145), comme le détaille l'Annexe B.2 :

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) + \frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} \frac{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q}^{\text{fixés}}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} (2\pi)^{-2} \int_0^{+\infty} d\check{K} \left[\frac{\check{K}^2(\check{K}^2 - 1)}{\check{\zeta} - (\check{K}^2 - 1)^2} + 1 \right] = \frac{1}{16i\pi} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} - (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \quad (148)$$

Nous aboutissons à la relation de dispersion non quadratique

$$\check{\zeta}_Q \equiv \left(\check{z}_q - 2\check{\Delta} \check{\Delta} \frac{\check{Q}^{\text{fixé}}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} - C \check{Q}^2 \left\{ 1 + \check{\Delta}^{-1/2} \left[\frac{i\sqrt{2}}{\pi\sqrt{C}}(r - r^*) + \frac{3i/2}{\pi\sqrt{C}}(r + r^*) \right] + O(\check{\Delta}^{-1}) \right\} \right) \quad (149)$$

avec les notations $C = \frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4$ et $r = (1 + iC^{1/2}\check{Q})^{1/2}$. À faible \check{Q} , on peut faire l'approximation $r \approx 1$; on retrouve les deux premiers termes du développement (86) du coefficient du départ quadratique de la branche, soit l'ordre dominant pour la partie réelle et pour la partie imaginaire. À grand \check{Q} , on peut faire l'approximation $r \approx \exp(i\pi/4)C^{1/4}\check{Q}^{1/2} + \exp(-i\pi/4)C^{-1/4}\check{Q}^{-1/2}/2$, ce qui donne naissance à des contributions en \check{Q}^2 , $\check{Q}^{5/2}$ et $\check{Q}^{3/2}$; on retrouve alors la limite à faible \check{q} du développement (136).³⁷ Le raccordement est parfait, et il n'existe pas, dans la branche du continuum de type II près du point d'annulation du potentiel chimique, d'autre échelle de nombre d'onde que $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ et $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$. Pour être complets, développons les résidus dans les voies de phase et de module, et le déphasage entre ces deux voies conduisant au résidu global maximal :

$$|\check{z}_-| \frac{\check{Q}^{\text{fixé}}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{16\check{Q}}{\check{\Delta}^{1/2}} \left[1 - \frac{\sqrt{2}\check{Q} \operatorname{Re} r}{2\pi\check{\Delta}^{1/2} \sqrt{1 + C\check{Q}^2}} + O(\check{\Delta}^{-1}) \right], \quad |\check{z}_+| \frac{\check{Q}^{\text{fixé}}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{8C\check{Q}^3}{\check{\Delta}^{5/2}} \quad \text{et} \quad \theta + \frac{\pi}{2} \frac{\check{Q}^{\text{fixé}}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} - \check{\Delta}^{-1/2} \frac{\operatorname{Re} r}{\pi\sqrt{C}} \quad (150)$$

4.8. Prolongement analytique pour $\mu > 0$ par les fenêtres $\epsilon > \epsilon_2(q)$ et cas $\mu < 0$

Nous examinons brièvement dans cette section la ou les branches d'excitation collective du continuum obtenues par prolongement analytique de l'équation aux énergies propres à travers des intervalles en énergie autres que $[\epsilon_1(q), \epsilon_2(q)]$. Rappelons que les points de branchement $\epsilon_i(q)$ de l'équation et leur domaine d'existence en le nombre d'onde q ont fait l'objet de la section 4.2.1.

4.8.1. Du côté BCS : $\mu > 0$

Commençons par le cas d'un potentiel chimique strictement positif. Pour des nombres d'onde $q < q_0$, où q_0 est donné par (57), les autres intervalles de prolongement possibles sont $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ et $[\epsilon_3(q), +\infty[$. Dans la procédure

37. Remplaçons en effet \check{q} par $\check{\Delta}^{-1/2}\check{Q}$ dans (136) et développons jusqu'à l'ordre relatif $\check{\Delta}^{-1/2}$. Le terme a_0 redonne la contribution en \check{Q}^2 , le terme a_1 redonne la contribution en $\check{Q}^{5/2}$, et le bout en $\check{q}^{3/2}$ du terme a_3 redonne la contribution en $\check{Q}^{3/2}$. Le terme a_2 et le bout en $\check{q}^{7/2}$ de a_3 contribuent aux ordres relatifs $\check{\Delta}^{-1}$ et $\check{\Delta}^{-3/2}$, hors de portée de (149).

(12), il faut alors utiliser respectivement la forme III et la forme IV des densités spectrales $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$, au sens de la table 2.

La différence essentielle avec la forme de type II est que les $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ dépendent de l'énergie réelle ϵ au travers des deux premières racines s_1 et s_2 , ou de la deuxième racine s_2 de l'équation cubique (71) sur s , cette équation dépendant paramétriquement de ϵ . Il faut maintenant prolonger analytiquement les densités spectrales donc les racines s_i à des valeurs complexes z de l'énergie dans le quatrième quadrant $\text{Re } z > 0$ et $\text{Im } z < 0$ auquel notre étude est limitée. En utilisant les formules de Cardan, on trouve que les racines s_i présentent, en fonction de z , des lignes de coupure là où le discriminant de Cardan est réel négatif, et un point de branchement là où il s'annule.³⁸ On se débarrasse des lignes de coupure en effectuant numériquement un relèvement continu des trois racines $s_i(z)$ de l'équation cubique le long d'un chemin C reliant z à un point origine ϵ_0 fixé dans l'intervalle de prolongement analytique $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ (par exemple, son milieu) ou $[\epsilon_3(q), +\infty[$ (par exemple $2\epsilon_3(q)$). En revanche, on ne peut pas éliminer les points de branchement des $s_i(z)$. Leurs positions dans le plan complexe (autres que les valeurs attendues $\pm 2\Delta$) sont données par les racines du polynôme $P_8(X)$ de degré huit, voir (59), dont on a déjà signalé dans la section 4.2.2 qu'il est relié au discriminant de l'équation cubique. Heureusement, il résulte de la note 21 que $P_8(X)$ n'admet à l'intérieur du quatrième quadrant qu'une seule racine complexe α . Il reste à préciser de quel côté de α s'effectue le relèvement continu des $s_i(z)$: à point de départ ϵ_0 et d'arrivée z fixé, passer d'un côté de α ou de l'autre a pour effet d'échanger les racines $s_2(z)$ et $s_3(z)$, comme nous l'avons vérifié numériquement, ce qui change les densités spectrales. Dans la présente étude, nous avons choisi de ne jamais passer sous le point α , c'est-à-dire de faire le tour par au-dessus et par la gauche si $\text{Re } z < \text{Re } \alpha$ et $\text{Im } z < \text{Im } \alpha$; la ligne de coupure correspondante sur les $s_i(z)$, et donc sur les densités spectrales prolongées $\rho_{ss'}(z, \mathbf{q})$,³⁹ est la demi-droite verticale partant de α vers le bas.

Les résultats de notre étude numérique sont présentés sur la figure 8, pour trois valeurs de la force des interactions, $\Delta/\mu = 1/10$ dans le régime de couplage faible, $\Delta/\mu = 1$ dans le régime de couplage fort et $\Delta/\mu = 5$ près du point d'annulation du potentiel chimique. Nous trouvons une branche $q \mapsto z_q$ de type III, du moins tant que Δ/μ n'est pas trop grand (elle est absente du quatrième quadrant pour $\Delta/\mu = 5$), voir les figures 8a et 8b. Son domaine d'existence en nombre d'onde est un intervalle $[q_1, q_0]$; la borne supérieure a la valeur maximale accessible q_0 , mais la borne inférieure est strictement positive, parce que la partie réelle de z_q s'annule (et z_q passe virtuellement dans le troisième quadrant) avant que q n'atteigne zéro. Dans le régime de couplage faible, on peut comme dans la section 4.6.2 faire tendre $\check{\Delta}$ vers zéro à \check{z} fixé et réduire l'équation aux énergies propres à $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + \check{M}_{+-\downarrow}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) = 0$ comme dans (102). Pour $\check{q} > 2/3$, il résulte directement de l'équation (99) que

$$\check{\rho}_{++}^{(0)[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) + \check{\rho}_{+-}^{(0)[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{\pi\check{z}}{2\check{q}} = \check{\rho}_{++}^{(0)[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) + \check{\rho}_{+-}^{(0)[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) \quad (151)$$

si bien que le terme de Nozières prend exactement la même forme pour les intervalles de prolongement $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ et $[\epsilon_2, \epsilon_3]$. Pour $\check{q} < 2/3$, l'intervalle de prolongement $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ est coupé en deux par $\check{q}(2 + \check{q})$ mais, comme on passe au-dessus du point α dans le relèvement continu des racines, c'est la troisième colonne de (99) qui compte et la relation (151) reste vraie. En effet, la borne $\check{q}(2 + \check{q})$ n'est autre que la limite de α à faible $\check{\Delta}$ (voir la phrase après (99) et la note 21). On en déduit que les branches de type II et de type III coïncident dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à \check{q} fixé, ce que le calcul numérique confirme magistralement, voir la figure 8a. En revanche, nous trouvons suivant les cas une ou deux branches de type IV, voir les figures 8d, 8e, 8f. Leur domaine d'existence en nombre d'onde est une réunion de deux intervalles, au gré des annulations de la partie réelle ou de la partie imaginaire de z_q . L'intervalle haut est compact pour Δ/μ assez grand, mais s'étend jusqu'à l'infini sinon. Chose remarquable, l'intervalle bas commence en $q = 0$,

38. Ce phénomène est général pour un polynôme $P(X, z)$ dont les coefficients dépendent analytiquement de z . Considérons un relèvement analytique d'une racine $s(z)$ le long d'un chemin dans le plan complexe. En dérivant l'équation définitoire $P(s(z), z) = 0$ par rapport à z , on trouve que $ds/dz = -\partial_z P(s, z)/\partial_X P(s, z)$, ce qui reste bien défini tant que $\partial_X P(s, z) \neq 0$ donc tant que $s(z)$ n'est pas racine multiple de $P(X, z)$.

39. Les racines $s_i(z)$ sont ensuite insérées dans les arguments des fonctions elliptiques incomplètes E et F , voir (66) et (67) par exemple. Ces fonctions elliptiques présentent des lignes de coupure décrites dans la note 20, que l'on peut toujours déplacer par déformation continue, et des points de branchement inamovibles. Montrons par l'absurde que les arguments de E et F n'atteignent jamais ces points de branchement, au cours du voyage des $s_i(z)$ dans le plan complexe : si c'était le cas, on aurait $1 + (1 - s^2) \text{sh}^2 \Omega = 0$, avec $\text{sh}^2 \Omega = (z^2 - 4\Delta^2)/(4\Delta^2)$ et s solution de l'équation déduite de (71) par remplacement de ϵ par z ; des manipulations élémentaires dans (71) ainsi modifiée font tomber sur la condition impossible à satisfaire $1/\text{sh}^2 \Omega = 0$. Pour calculer numériquement les fonctions E et F , on revient à leur définition intégrale, voir §8.111 de [20], et on déplace si nécessaire la ligne de coupure de la racine carrée dans l'intégrande par relèvement continu. On peut aussi travailler directement sur les fonctions (66,67), en écrivant par exemple $f_{--}(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2) = \int_{s_2}^1 \frac{dX}{\sqrt{1-X^2} \sqrt{1+(1-X^2)\text{sh}^2 \Omega}^{3/2}}$ grâce au changement de variable $X = \cos \alpha$.

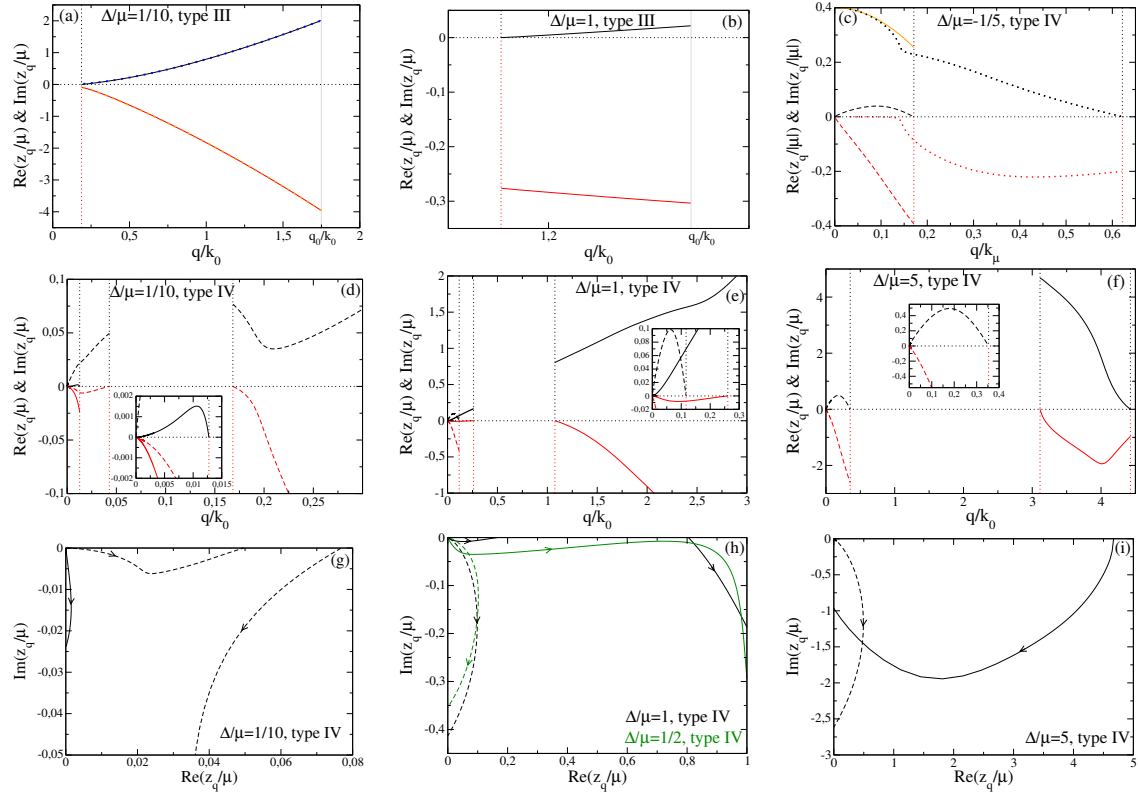


FIGURE 8: Dans un gaz de fermions en interaction de portée nulle (cas des atomes froids), branches du continuum $q \mapsto z_q$ obtenues en effectuant le prolongement analytique des équations aux énergies propres à travers d'autres intervalles que celui $[\epsilon_1(q), \epsilon_2(q)]$ de type II utilisé jusqu'à présent. Trait plein noir ou tireté noir : partie réelle; trait plein rouge ou tireté rouge : partie imaginaire. Les interruptions des branches, dues à des sorties du quatrième quadrant seul exploré ici (annulations de la partie réelle ou imaginaire de z_q) sont repérées par des pointillés verticaux. Pour $\mu > 0$, résultats numériques pour les branches de type III (prolongement par l'intervalle $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$) en (a) et (b), et de type IV (intervalle $[\epsilon_3(q), +\infty[$) en (d), (e) et (f). Pour $\mu < 0$, résultats numériques pour les branches de type IV en (c) (l'intervalle $[\epsilon_3(q), +\infty[$ est le seul possible). Ici $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, $k_\mu = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$, $\Delta/\mu = 1/10$ en (a) et (d), $\Delta/\mu = 1$ en (b) et (e), $\Delta/\mu = 5$ en (f) (pas de branche de type III pour cette valeur) et $\Delta/\mu = -1/5$ en (c). L'intervalle $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ se ferme et la branche de type III cesse d'exister en $q = q_0(\Delta)$ donné par (57) et repéré par un trait plein vertical gris. En couplage faible, en (a), la branche de type III se confond presque avec celle précédemment étudiée de type II et est très bien reproduite par la solution de (102) (gros points bleu foncé ou orange). Vignettes : agrandissements; les valeurs à $\tilde{q} < 0,001$ sont tirées de (154) après résolution numérique de (153) réécrite comme une équation sur $s_2(z)$. Trajectoires des branches de type IV dans le plan complexe pour $\Delta/\mu = 1/10$ en (g), $\Delta/\mu = 1$ (noir) et $\Delta/\mu = 1/2$ (vert) en (h), $\Delta/\mu = 5$ en (i); les flèches indiquent le sens des q croissants. Partout pour les branches de type IV : en trait plein (en tireté), branche hypoacoustique (155) [hyperacoustique (157)] et son émanation éventuelle à grand q après excursion hors du quatrième quadrant. En (c) : la branche en pointillé est d'une autre nature, voir son comportement analytique (158) à faible \tilde{q} (trait plein orange).

où z_q tend vers zéro ; ce comportement diffère de celui de la branche du continuum de type II étudiée dans les autres sections et évoque plutôt la branche acoustique.

Montrons maintenant analytiquement que les branches collectives de type IV n'ont pas un départ acoustique $z_q \approx q$ mais un départ hyperacoustique $z_q \approx q^{4/5}$ (la vitesse de groupe ou de phase diverge en $q = 0$) ou hypoacoustique $z_q \approx q^{3/2}$ (la vitesse tend vers zéro). Pour cela, construisons une forme approchée de l'équation sur z_q à basse énergie et à bas nombre d'onde, d'abord en remplaçant les éléments de matrice de M non prolongés par leur ordre dominant en q à $\zeta \equiv \check{z}/\check{q}$ fixé,⁴⁰

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \simeq \check{M}_{--}(0, 0) \equiv \frac{A}{(2\pi)^3}, \quad \check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \simeq \frac{(B + C\zeta^2)}{(2\pi)^3} \check{q}^2, \quad \check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \simeq \frac{D\zeta\check{q}}{(2\pi)^3} \quad (152)$$

puis en remplaçant $\text{sh } \Omega$ par $-i$ dans les équations (66,67,68) utiles au prolongement analytique (12). Nous avons admis dans la seconde étape, en le vérifiant numériquement, que $s_2(z)$ est dans le quatrième quadrant, tout comme ζ . Nous aboutissons ainsi à une équation aux énergies propres beaucoup plus simple,

$$\left[i\pi^2 \check{\Delta} \phi_{--}(s_2) + A\check{q} \right] \left[-i \frac{\pi^2 \zeta^2}{4\check{\Delta}} \phi_{++}(s_2) + (B + C\zeta^2)\check{q} \right] - \left[-\frac{\pi^2}{2} \zeta \phi_{+-}(s_2) + D\zeta\check{q} \right]^2 \simeq 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \phi_{--}(s) = \frac{\ln(1+\sqrt{1-s^2}) - \ln(1-\sqrt{1-s^2})}{2} \\ \phi_{++}(s) = \frac{1}{2} \phi_{--}(s) + \frac{(1-s^2)^{1/2}}{2s^2} \\ \phi_{+-}(s) = \frac{(1-s^2)^{1/2}}{s} \end{cases} \quad (153)$$

Pour être cohérent, il faut aussi approximer l'équation (71) sur $s_2(z)$ comme suit,

$$\frac{4}{\zeta^2} (1 - i s_2 \check{\Delta}) \simeq \frac{1 - s_2^2}{-s_2^2} \quad (154)$$

ce qui permet d'éliminer facilement ζ et de considérer (153) comme une équation sur $s_2(z)$.

Un premier type de solution de (153) correspond à $\zeta \rightarrow 0$ donc $s_2 \rightarrow -i/\check{\Delta} + 0^+$. Dans la limite $\check{q} \rightarrow 0$, on trouve par tâtonnements que ζ^2/\check{q} a une limite finie et non nulle γ ,⁴¹ et que (153) se réduit à une équation affine sur γ . D'où le comportement hypoacoustique exact de la branche :

$$\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \gamma^{1/2} \check{q}^{3/2} [1 + O(\check{q})] \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{-4i\pi^{-2} B \check{\Delta} \phi_{--}(s)}{(\phi_{++} \phi_{--} - \phi_{+-}^2)(s)} \Big|_{s=-i/\check{\Delta}+0^+} \quad (155)$$

Pour que z_q soit dans le quatrième quadrant, il faut que γ ait une partie imaginaire négative, ce qui impose $\check{\Delta} \in]0, \check{\Delta}_0[$ avec $\check{\Delta}_0 \simeq 2,138$.⁴² Ceci explique pourquoi la branche hypoacoustique n'apparaît pas à faible \check{q} sur la figure 8f. De plus, on montre que, parmi les résidus Z_{\pm} de la section 4.3, celui Z_+ dans la voie des petits écarts de phase est dominant, et diverge comme $\check{q}^{-1/2}$; à faible \check{q} , les modes hypoacoustiques sont donc surtout des modes de phase du paramètre d'ordre.

Un second type de solution de (153) correspond à $|\zeta| \rightarrow +\infty$ donc $s_2 \rightarrow 1 - i0^+$. Alors, dans (153), on néglige B devant $C\zeta^2$, on divise l'équation restante par $(\pi^2 \zeta/2)^2$, on développe et on regroupe par puissances de \check{q} , puis on néglige les termes en \check{q}^2 pour obtenir :

$$(\phi_{--} \phi_{++} - \phi_{+-}^2)(s_2) + \frac{4\check{q}}{\pi^2} \left[D \phi_{+-}(s_2) + iC \check{\Delta} \phi_{--}(s_2) - \frac{iA}{4\check{\Delta}} \phi_{++}(s_2) \right] \simeq 0 \quad (156)$$

Il reste à remplacer chaque contribution par son ordre dominant en le petit paramètre $u = (1 - s_2^2)^{1/2}$: dans le second terme de (156), il suffit de savoir que $\phi_{--} \sim \phi_{++} \sim \phi_{+-} \sim u$, mais dans le premier, il faut développer chaque fonction

40. On donne $A = \int d^3 \check{k} \frac{\check{\Delta}^2}{2\check{\epsilon}_k^3}$, $B = \int \frac{d^3 \check{k}}{2\check{\epsilon}_k} \left(\frac{\check{\epsilon}_k}{4\check{\epsilon}_k^2} + \frac{\check{\Delta}^2 \check{k}^2}{2\check{\epsilon}_k^4} \right)$, $C = \int d^3 \check{k} \frac{(-1)}{8\check{\epsilon}_k^3}$ et $D = \int d^3 \check{k} \frac{\check{\epsilon}_k}{-4\check{\epsilon}_k^3}$. Il n'y a pas de terme linéaire en ζ dans $\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q})$ car c'est une fonction paire de \check{z} . D'après la relation (A6) de [21], on a aussi $B = \int d^3 \check{k} \frac{\check{k}^2}{6\check{\epsilon}_k^3}$ comme dans l'équation (23) de la référence [23].

41. ζ^2/\check{q} ne peut pas tendre vers l'infini car $\phi_{++} \phi_{--} - \phi_{+-}^2$ ne s'annule pas en $s = -i/\check{\Delta} + 0^+$. Supposer que $\zeta^2/\check{q} = o(1)$ conduit au résultat contradictoire $\zeta^2 \approx \check{q}$.

42. Si $\check{\Delta} = \text{sh } \tau$, $\phi_{--} = \tau + i\pi/2$, $\phi_{++} = (\tau - \text{sh } \tau \text{ ch } \tau + i\pi/2)/2$ et $\phi_{+-} = i \text{ ch } \tau$ dans (155). De plus, $\gamma^{1/2} \sim -2i/[3\check{\Delta}(\pi^2/8 - 1)]^{1/2}$ lorsque $\check{\Delta} \rightarrow 0$.

ϕ jusqu'à l'ordre relatif u^4 (c'est l'ordre sous-sous-dominant) pour obtenir l'équivalent $u^6/45$. D'où la loi $u \sim \check{q}^{1/5} u_0$ et le comportement hyperacoustique exact de la branche :

$$\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \beta^{1/2} \check{q}^{4/5} \left[1 + O(\check{q}^{2/5}) \right] \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{4(i\check{\Delta} - 1)}{u_0^2} \quad \text{et} \quad u_0 = \left(\frac{180}{\pi^2} \right)^{1/5} \left(\frac{iA}{4\check{\Delta}} - iC\check{\Delta} - D \right)^{1/5} \quad (157)$$

Dans (157), il faut choisir la détermination de la racine cinquième de manière que u_0 soit dans le premier quadrant et que β ait une partie imaginaire négative, ce qui peut être fait pour toute valeur de $\check{\Delta} > \check{\Delta}_1 \approx 0,05283$, d'où la présence systématique d'une branche hyperacoustique de type IV à faible \check{q} sur la figure 8. ⁴³ On vérifie que, parmi les résidus Z_{\pm} de la section 4.3, celui Z_+ dans la voie des petits écarts de phase est dominant, et diverge comme $\check{q}^{-4/5}$; à faible \check{q} , les modes hyperacoustiques sont donc eux aussi surtout des modes de phase du paramètre d'ordre.

Il reste à comprendre physiquement la branche de type IV sur l'intervalle haut en nombre d'onde. Nous affirmons que cette composante connexe n'est que le prolongement à grand q , c'est-à-dire le résultat de l'irruption dans le quatrième quadrant, de la branche hypoacoustique ou de la branche hyperacoustique. On le voit bien en prolongeant mentalement les courbes sur la figure 8d, la composante à grand q serait le retour de la branche hyperacoustique après un passage dans le premier quadrant. De même, sur la figure 8e, la composante à grand q semble être le retour de la branche hypoacoustique après un détour dans le premier quadrant. En revanche, sur la figure 8f, nous interprétons la composante à grand q comme la première entrée de la branche hypoacoustique dans le quatrième quadrant, cette dernière pointant dès son départ à faible q vers le premier quadrant, voir la discussion après l'équation (155). Pour rendre ces interprétations plus faciles à suivre, nous avons représenté sur les figures 8g, 8h et 8i la trajectoire des branches de type IV à $\mu > 0$ dans le plan complexe. Pour les justifier numériquement, nous représentons également la trajectoire des branches pour $\Delta/\mu = 1/2$ sur la figure 8h : la branche hypoacoustique y est connexe dans le quatrième quadrant. Ces figures conduisent à la remarque empirique suivante : les branches qui s'aventurent dans le troisième quadrant ($\text{Re } z < 0$ et $\text{Im } z < 0$) ne reviennent jamais (aux q ultérieurs) dans le quatrième quadrant, à l'inverse de celles qui s'aventurent dans le premier quadrant.

4.8.2. Du côté CBE : $\mu < 0$

Pour terminer, cherchons une branche du continuum dans le cas d'un potentiel chimique strictement négatif. Comme nous l'avons dit dans la section 4.2.1, les densités spectrales admettent alors, sur l'axe des énergies réelles, $\epsilon_3(q)$ de l'équation (56) comme seul point de non-analyticité. Le prolongement analytique de l'équation aux énergies propres ne peut se faire qu'à travers l'intervalle $[\epsilon_3(q), +\infty[$, donc ne peut être que de type IV. L'adimensionnement des variables doit être revu et le calcul des densités spectrales doit être refait. Nous exprimons désormais les nombres d'onde en unités de $k_\mu = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$, par exemple $\check{q} = q/k_\mu$, les énergies en unités de $|\mu|$, par exemple $\check{\epsilon} = \epsilon/|\mu|$ et $\check{\xi}_k = \check{k}^2 + 1$, les densités spectrales et les éléments de matrice de M en unités de $2mk_\mu/\hbar^2$. Nous trouvons que les densités spectrales réduites sont toujours données par la forme IV de la table 2, à condition que l'on remplace le terme $1 - \check{q}^2/4$ par $-(1 + \check{q}^2/4)$ dans l'équation cubique (71). Pour $\check{\epsilon} > \check{\epsilon}_3(\check{q})$, l'équation modifiée admet en effet, pour tout $\check{q} > 0$, trois racines réelles, $s_1(\epsilon) < -1$, $s_2(\epsilon) \in [0, 1]$ qui intervient dans les densités spectrales, et $s_3(\epsilon) > 1$, comme le montre une discussion graphique. Le prolongement analytique de s_2 aux énergies complexes z se fait par relèvement continu comme dans la section 4.8.1, en ne passant jamais en dessous de son ou de ses points de branchement, c'est-à-dire des racines complexes du polynôme $P_8(X)$ dans le quatrième quadrant. ⁴⁴

Nous avons étudié numériquement le cas $\check{\Delta} = \Delta/|\mu| = 1/5$, voir la figure 8c. À faible \check{q} , nous trouvons une branche hyperacoustique dont le départ est bien décrit par (157) si l'on pense à changer le facteur $i\check{\Delta} - 1$ en $i\check{\Delta} + 1$ dans β , mais qui finit par quitter le quatrième quadrant ; l'équation (157) ainsi modifiée permet d'ailleurs de montrer que cette branche hyperacoustique existe au voisinage de $q = 0$ pour toute valeur de $\check{\Delta}$. Nous trouvons aussi une deuxième branche, qui n'atteint pas les grands \check{q} mais tend vers la valeur 2Δ en l'origine des nombres d'onde en serrant de près

43. Le prolongement de β à $\check{\Delta} \in]0, \check{\Delta}_1[$ a une partie imaginaire positive et vérifie $\beta^{1/2} \sim (8\pi\check{\Delta}/45)^{1/5}$ lorsque $\check{\Delta} \rightarrow 0$.

44. Pour $\mu < 0$, il faut remplacer \check{q} par $i\check{q}$ dans la définition (59) de $P_8(X)$. Alors $P_8(X)$ admet pour $\check{q} < \check{q}_*(\check{\Delta})$ une seule racine α strictement à l'intérieur du quatrième quadrant, et en admet deux, α et α' , sinon. Ici, $\check{q}_*(\check{\Delta})$ est la racine réelle positive du discriminant de Cardan δ de la note 21 considéré comme un polynôme en \check{q} et lui aussi soumis à la substitution $\check{q} \rightarrow i\check{q}$.

l'axe réel (sa partie imaginaire tend vers zéro comme q^3). Nous lui prédisons analytiquement un départ quadratique⁴⁵

$$z_q \underset{q \rightarrow 0}{=} 2\Delta - \frac{1}{\check{\Delta} \sin^2 \psi} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + O(q^3) \quad \text{avec} \quad \frac{\psi(\psi + \sin \psi \cos \psi)}{2 \sin^2 \psi} = \left[1 - 8\pi \check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0) \right]^2 \quad (158)$$

représenté par un trait plein orange sur la figure 8c et en bon accord avec les résultats numériques ; l'équation transcendante sur $\psi = \pi/2 - \text{asin } s_2$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, \pi]$. Le résultat (158) ne vaut en fait que pour $\psi < \pi/2$ c'est-à-dire $\check{\Delta} < 0, 222$; pour $\check{\Delta} > 0, 222$, la branche en question sort du quatrième quadrant vers le premier quadrant (sa partie imaginaire s'annule) avant d'atteindre $\check{q} = 0$.⁴⁶ Le départ quadratique (158) n'est pas sans rappeler celui (82) de la branche du continuum habituelle ; le raisonnement ayant conduit à (92) donne ici aussi des résidus de limite nulle en $q = 0$, $\check{Z}_- \approx \check{q}$ et $\check{Z}_+ \approx \check{q}^3$. On n'observe en revanche pas de branche hypoacoustique. D'ailleurs, le raisonnement conduisant à (155) ne se transpose pas au cas $\mu < 0$: pour $z = o(\check{q})$, on trouve numériquement que $s_2(z) = o(1)$, et que c'est la racine $s_3(z)$ qui admet la limite attendue $i/\check{\Delta}$, dans le relèvement continu passant au-dessus du point de branchement α .

5. Conclusion

Dans un gaz tridimensionnel spatialement homogène non polarisé de fermions de spin 1/2 en interaction attractive, préparé à la limite thermodynamique à température nulle donc apparié entièrement et condensé par paires liées $\uparrow\downarrow$, nous avons étudié analytiquement la branche du continuum correspondant aux modes d'excitation collective du gaz par brisure de paires. Comme l'a montré la référence [3], sous certaines conditions, de tels modes peuvent se manifester expérimentalement par un pic lorentzien en pulsation $\omega \mapsto |Z_q/(\hbar\omega - z_q)|^2$ dans l'intensité d'une fonction de réponse en fréquence sur la variable collective du gaz perturbé que constitue le paramètre d'ordre complexe $\Delta(\mathbf{r}, t)$. Nous avons donc analysé l'énergie complexe z_q du mode ainsi que son résidu Z_q pour une excitation non polarisante très faible et bornée en temps mais de nature arbitraire, en fonction du vecteur d'onde \mathbf{q} , afin d'aboutir à une description complète de la branche. Mathématiquement, nous utilisons la théorie BCS dépendant du temps linéarisée autour de la solution stationnaire d'énergie minimale, pour obtenir une équation sur les énergies propres des modes, qu'il faut toujours prolonger analytiquement au demi-plan complexe inférieur à travers la ligne de coupure due au continuum de paire brisée à \mathbf{q} fixé, si l'on veut trouver z_q . Physiquement, le fait que $\text{Im } z_q$ soit strictement négative reflète l'amortissement du mode par brisure de paires et émission de fermions libres de vecteurs d'onde $\mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$ dans le continuum, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Notre travail étudie analytiquement la branche à nombre d'onde q quelconque, et pour une force des interactions quelconque ; il va donc significativement au-delà des travaux précédents, qui n'obtiennent des résultats analytiques que dans la limite des faibles nombres d'onde $q \rightarrow 0$, c'est-à-dire seulement sur le départ quadratique de la branche $z_q - 2|\Delta| \propto q^2$, dans la limite de couplage faible $|\Delta|/\mu \rightarrow 0^+$ [2] ou pour un couplage $|\Delta|/\mu$ quelconque mais un potentiel chimique $\mu > 0$ [3].

Dans la limite de couplage faible $|\Delta|/\mu \rightarrow 0^+$, la partie réelle de la relation de dispersion présente trois échelles de variation en nombre d'onde. (i) La première $q_1 = k_0|\Delta|/\mu$, où k_0 est le nombre d'onde minimisant l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$

45. Si on admet que $z_q - 2\Delta \approx q^2$, on voit que $\text{sh } \Omega \approx q \rightarrow 0$ et $\text{ch } \Omega \rightarrow 1$ dans (66,67,68) si bien que $f_{--}(\psi) \sim \frac{\text{sh}^2 \Omega}{2}(\psi + \sin \psi \cos \psi)$, $f_{++}(\psi) \sim \psi$, $f_{+-}(\psi) \sim \text{sh } \Omega \sin \psi$. De plus, le bord inférieur du continuum de paire brisée vaut $2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2} > 2\Delta$ pour $\mu < 0$ et $q = 0$; du coup, $M_{++}(z_q, q)$ et $M_{+-}(z_q, q)$ ont une limite finie et non nulle $M_{++}(2\Delta, 0)$ et $M_{+-}(2\Delta, 0)$ lorsque $q \rightarrow 0$, alors que $M_{--}(z_q, q) = O(q^2)$ puisque $M_{--}(2\Delta, 0) = 0$ comme dans (53) et $M_{--}(z, q)$ varie quadratiquement en q et linéairement en $z - 2\Delta$ autour de $(z, q) = (2\Delta, 0)$. Compte tenu de la procédure de prolongement (12) et du facteur $1/q$ dans la densité spectrale, voir la table 2, la contribution de M_{++} et M_{--} est négligeable dans l'élément de matrice prolongé alors que celle de M_{+-} ne l'est pas. Enfin, en faisant $q \rightarrow 0$ dans l'équation (71) modifiée pour $\mu < 0$, sachant que z_q est dans le quatrième quadrant et que $\sin \psi = [1 - s_2^2(z_q)]^{1/2}$, on trouve que $\text{sh } \Omega \sim -i\check{q}/(\check{\Delta} \sin \psi)$ et on aboutit à (158). L'expression (85) de $\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)$ et son signe valent toujours si l'on pose $\tau = \text{argsh}(\mu/\Delta) < 0$ et si l'on remplace le facteur désormais imaginaire pur $-(e^{2\tau} - 1)^{1/2}$ par $(1 - e^{2\tau})^{1/2}$.

46. Dans la limite $\check{q} \rightarrow 0$, la racine $s_2(z)$ obtenue par relèvement continu est positive pour $\check{z} = 2\check{\Delta} + (C - i0^+)\check{q}^2/\check{\Delta}$ dès que le coefficient réel C est < -1 , comme c'est le cas dans (158). À l'aide de (71) modifiée pour $\mu < 0$, on trouve en effet que $s_2^2(z) \rightarrow (1 + C - i0^+)/(C - i0^+)$ donc $s_2(z) \rightarrow [(1 + C - i0^+)/(C - i0^+)]^{1/2}$ puisque s_2 doit être proche de 1 lorsque $C \gg 1$. Or on a $s_2 = \cos \psi$. La condition $s_2 > 0$ impose donc $\psi < \pi/2$. De plus, nous avons calculé analytiquement le coefficient du terme en q^3 dans le développement (158). On trouve qu'il est imaginaire pur, que sa partie imaginaire est < 0 pour $\psi < \pi/2$ et s'annule en changeant de signe en $\psi = \pi/2$. C'est aussi à cette valeur seuil $\psi = \pi/2$ ($\check{\Delta} \approx 0, 222$) que \check{z}_q se confond au second ordre en \check{q} avec la racine réelle $\check{e}_2(\check{q})$ du polynôme $P_8(X)$ de (59) transposé au cas $\mu < 0$, donc avec un point de non-analyticité de deux des racines $s_i(\check{z})$: pour $\mu < 0$, il faut en effet remplacer \check{q} par $i\check{q}$ dans (59), et donc dans (62), comme le dit la note 44.

d'une quasi-particule BCS ($\epsilon_{k_0} = |\Delta|$), correspond sans surprise à $q \approx 1/\xi$ où ξ est la taille d'une paire liée $\uparrow\downarrow$. La branche admet une loi limite universelle lorsque z_q est exprimé en unités de $|\Delta|$ et que $|\Delta|/\mu$ tend vers zéro à q/q_1 fixé : cette loi vaut aussi bien pour des fermions en interaction de contact attractive dans l'onde s (cas des atomes froids) que pour des fermions chargés présentant de plus une interaction de Coulomb répulsive à longue portée (cas d'un supraconducteur BCS au sens de la référence [2] c'est-à-dire sans réelle inclusion des phonons du réseau cristallin). Si l'on part de $q = 0^+$, la partie réelle croît, présente un maximum $\approx 2,16|\Delta|$ en $q/q_1 \approx 1,70$, puis décroît et tend vers zéro comme $|\Delta|q_1/q$, à un facteur logarithmique en q/q_1 près ; la partie imaginaire est décroissante et diverge linéairement en $-\mu q/k_0$ à des corrections logarithmiques en q/q_1 près. À l'ordre dominant, le résidu est porté par la voie des petits écarts en module du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre. Le mode du continuum est un mode de module et l'on peut négliger le couplage phase-module dans les équations BCS linéarisées. (ii) La deuxième échelle de nombre d'onde est $q_2 = k_0(|\Delta|/\mu)^{2/3}$: sur la partie réelle de la branche, la décroissance en $1/q$ de l'échelle précédente s'interrompt graduellement, $\text{Re } z_q$ passe par un minimum de l'ordre de $\mu(|\Delta|/\mu)^{4/3}$ et situé en $q_{\min} \approx q_2$, à des facteurs logarithmiques en $|\Delta|/\mu$ près, puis remonte ; ceci est dû à l'entrée en jeu du couplage phase-module. La partie imaginaire continue à décroître de la même manière approximativement linéaire en q . Même si le résidu dans la voie de module l'emporte encore, celui dans la voie de phase n'est plus négligeable. Le mode du continuum est en cours d'hybridation phase-module. (iii) La troisième échelle est $q_3 = k_0$; la partie imaginaire de z_q est approximativement proportionnelle à $-\mu q/k_0$, avec un coefficient logarithmique en $|\Delta|/\mu$, alors que la partie réelle est croissante, approximativement proportionnelle à $\mu(q/k_0)^{3/2}$, là aussi avec un coefficient logarithmique en $|\Delta|/\mu$; les résidus en phase et en module sont presque égaux : le mode vit avec des amplitudes presque égales dans les deux voies. En $q = 2k_0$, l'intervalle entre points de branchement de l'équation aux énergies propres, par lequel le prolongement analytique a été effectué, se referme et la branche cesse d'exister. Les résultats aux échelles q_2 et q_3 valent pour une interaction à courte portée, comme dans les gaz d'atomes froids, à laquelle nous nous limitons dans la suite ; on ne sait pas s'ils survivent au moins qualitativement à l'interaction de Coulomb.

Au voisinage droit du point d'annulation du potentiel chimique, $\mu/|\Delta| \rightarrow 0^+$, qui se situe dans le régime d'interaction forte, du côté à longueur de diffusion positive du raccordement CBE-BCS, la branche du continuum z_q est, à l'ordre dominant en $\mu/|\Delta|$, purement réelle et quadratique en q , $z_q - 2|\Delta| \approx -128[\Gamma(5/4)]^4 \pi^{-5} \hbar^2 q^2 / 2m$, sur tout son domaine d'existence $]0, 2k_0[$, domaine qui devient de plus en plus étroit puisqu'ici $k_0 = (2m\mu)^{1/2} / \hbar$, où m est la masse d'un fermion, tend vers zéro. À l'ordre suivant apparaît dans z_q une partie imaginaire non nulle, qui révèle l'existence de deux échelles de nombre d'onde. La première échelle, $Q_1 = k_0(\mu/|\Delta|)^{1/2}$, correspond à la limite de validité de l'approximation quadratique sur z_q (celle-ci exige $q \ll Q_1$, ce que la référence [3] ne disait pas) mais n'a pas reçu à ce jour d'autre interprétation physique. À cette échelle, la partie imaginaire est d'ordre de grandeur $\mu(\mu/|\Delta|)^{3/2}$, et passe de manière monotone d'un départ quadratique à un plongeon asymptotique semiquintique en q . La seconde échelle est $Q_2 = k_0$: à l'ordre dominant, la partie imaginaire de z_q est de l'ordre de $\mu(\mu/|\Delta|)^{1/4}$, est décroissante, et varie avec la même loi de puissance $q^{5/2}$ que dans la partie asymptotique $q \gg Q_1$ de l'échelle précédente. Aux deux échelles, le résidu dominant est porté par les petits écarts en module du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre : le mode du continuum reste de ce point de vue un mode de module, même s'il faut absolument inclure le couplage phase-module dans le calcul de son énergie pour avoir le bon résultat, au contraire de ce qui se passe dans la limite de couplage faible à $q = O(q_1)$.

Les résultats précédents, obtenus pour $\mu > 0$ et $q < 2k_0$, découlent d'un prolongement analytique de l'équation aux énergies propres à travers la ligne de coupure joignant ses deux premiers points de branchement $\epsilon_a(q)$ et $\epsilon_b(q)$ sur le demi-axe réel positif des énergies. Ils correspondent toujours à une branche du continuum de limite $2|\Delta|$ et de départ quadratique en $q = 0$. Pour un nombre d'onde pas trop grand ($q < q_0(\Delta, \mu) \in]2k_0/\sqrt{3}, 2k_0[$), il existe un troisième point de branchement $\epsilon_c(q)$. Le prolongement analytique par l'intervalle $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ donne naissance à une nouvelle branche d'excitation dans le quadrant inférieur droit du plan complexe, du moins pour $|\Delta|/\mu$ pas trop grand et q pas trop petit ; à faible couplage, elle coïncide presque avec la branche du continuum étudiée précédemment.

Enfin, il reste à effectuer le prolongement analytique par l'intervalle non compact $[\epsilon_{\max}(q), +\infty[$ où $\epsilon_{\max}(q)$ est le plus grand des points de branchement sur l'axe réel. Pour $\mu > 0$ et $q < 2k_0$, on a $\epsilon_{\max}(q) = \epsilon_c(q)$ ou $\epsilon_b(q)$ selon que q est inférieur ou supérieur à $q_0(\Delta, \mu)$, comme le montre le paragraphe précédent. Pour $\mu > 0$ mais $q > 2k_0$, ou pour $\mu < 0$ à $q > 0$ quelconque, l'équation aux énergies propres n'admet qu'un seul point de branchement d'énergie réelle positive, c'est le bord inférieur $2\epsilon_{k=q/2}$ du continuum de paire brisée, avec lequel $\epsilon_{\max}(q)$ se confond donc. En prolongeant par $[\epsilon_{\max}(q), +\infty[$, nous trouvons cette fois deux nouvelles branches. Leur domaine d'existence en nombre d'onde présente en général plusieurs composantes connexes, dont les bords marquent leurs points d'entrée ou de sortie

du quadrant inférieur droit du plan complexe. Pour $\mu > 0$, lorsque ces branches atteignent $q = 0$, elles adoptent aux faibles nombres d'onde un comportement hypoacoustique (l'énergie complexe $z_q \approx q^{3/2}$ tend vers zéro plus vite que linéairement et la vitesse de phase tend vers zéro) ou au contraire hyperacoustique (l'énergie $z_q \approx q^{4/5}$ tend vers zéro plus lentement que linéairement et la vitesse de phase diverge), le résidu dominant étant toujours porté par les petits écarts en phase du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre. Pour $\mu < 0$, on observe une branche hyperacoustique; en revanche, la branche hypoacoustique est remplacée par une autre branche, de limite $2|\Delta|$ (soit, comme l'espérait la référence [30], le double du paramètre d'ordre plutôt que l'énergie de liaison d'une paire $2(|\Delta|^2 + \mu^2)^{1/2}$) et de départ quadratique purement réel en $q = 0$ pour $\Delta/|\mu| < 0,222$, et qui ressemble alors à la branche du continuum habituelle, si ce n'est qu'elle est du côté bosonique du raccordement CBE-BCS.

Indiquons pour terminer quelques prolongements possibles de ce travail. La théorie BCS que nous avons utilisée n'est plus quantitative dans le régime d'interaction forte, en particulier à la limite unitaire souvent mise en oeuvre dans les expériences d'atomes froids; il serait bon dans ce cas de faire appel à une approche plus élaborée, comme celle de la référence [31]. Notre calcul de la relation de dispersion du mode du continuum ne tient pas compte de son couplage à la branche acoustique de Bogolioubov-Anderson (dans les gaz de particules neutres), qui n'a *a priori* pas de raison d'être négligeable à nombre d'onde et à force des interactions quelconques. Enfin, on pourrait se demander quelle est la contribution de la branche du continuum aux grandeurs thermodynamiques du gaz de fermions à basse température, c'est-à-dire pour $k_B T$ petit devant l'énergie de liaison d'une paire.

Remerciements

Nous sommes redevables à Serghei Klimin, Jacques Tempere, Alice Sinatra, Felix Werner, Ludovic Pricoupenko et Pascal Naidon d'utiles discussions et suggestions sur la branche du continuum. Nous remercions Serghei Klimin pour ses remarques sur le texte de l'article.

Annexe A. Sur le calcul analytique des densités spectrales

Annexe A.1. Dans la limite de couplage faible

Montrons comment passer de l'expression (29) de la densité spectrale $\rho_{--}^{(0)}$ à l'expression (30), en intégrant sur le nombre d'onde réduit \bar{K} à valeur fixée u du cosinus de l'angle polaire. Il suffit pour cela de trouver les points d'annulation de l'argument de la distribution δ de Dirac dans l'intégrande. Pour simplifier, nous pouvons tout de suite imposer $\bar{\epsilon} \equiv \epsilon/\Delta \geq 2$ (la densité spectrale est nulle sinon) et nous ramener au domaine d'intégration $u \geq 0$ et $\bar{K} \geq 0$ par parité de l'intégrande. Posons $a = \bar{q}u \geq 0$ si bien que $x_{\pm} = \bar{K} \pm a/2$ et $e_{\pm} = [1 + (\bar{K} \pm a/2)^2]^{1/2}$ dans (16). Il faut résoudre l'équation $\bar{\epsilon} = e_+ + e_-$ sur la variable \bar{K} . En enchaînant des élévations au carré et des regroupements de termes pour faire disparaître la racine carrée, il vient :

$$\bar{\epsilon} = e_+ + e_- \Leftrightarrow \bar{\epsilon}^2 = e_+^2 + e_-^2 + 2e_+e_- \Leftrightarrow 2e_+e_- = \bar{\epsilon}^2 - (e_+^2 + e_-^2) \Leftrightarrow (2e_+e_-)^2 - (e_+^2 + e_-^2 - \bar{\epsilon}^2)^2 = 0 \text{ et } \bar{\epsilon}^2 \geq e_+^2 + e_-^2 \quad (\text{A.1})$$

Introduisons $\bar{R} = [\bar{\epsilon}^2 - (4 + a^2)]/(\bar{\epsilon}^2 - a^2)$ et explicitons chaque terme de (A.1), pour obtenir la racine \bar{K}_0 et sa condition d'existence :

$$\bar{\epsilon} = e_+ + e_- \Leftrightarrow \bar{K}^2 = \frac{\bar{\epsilon}^2}{4} \bar{R} \text{ et } \frac{(\bar{\epsilon}^2 - a^2)^2 + 4a^2}{2(\bar{\epsilon}^2 - a^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{K} = \bar{K}_0 \equiv \frac{\bar{\epsilon}}{2} \bar{R}^{1/2} \text{ et } \bar{\epsilon} \geq (4 + a^2)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

En effet, la première inégalité impose $\bar{\epsilon}^2 - a^2 \geq 0$ (la fraction en jeu a un numérateur ≥ 0), et il faut avoir $\bar{R} \geq 0$. Pour le même prix, on obtient la valeur de $e_+ - e_-$ en $\bar{K} = \bar{K}_0$ par une astuce d'écriture, et donc les valeurs de e_{\pm} et de x_{\pm} :

$$e_+ - e_- = \frac{e_+^2 - e_-^2}{e_+ + e_-} = \frac{2a\bar{K}_0}{\bar{\epsilon}} = a\bar{R}^{1/2} \implies e_+ = \frac{\bar{\epsilon} + a\bar{R}^{1/2}}{2}, e_- = \frac{\bar{\epsilon} - a\bar{R}^{1/2}}{2}, x_+ = \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}^{1/2} + a}{2}, x_- = \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}^{1/2} - a}{2} \quad (\text{A.3})$$

L'identité ci-dessous qui en résulte permet d'intégrer (29) sur le nombre d'onde pour obtenir (30) :

$$\delta(e_+ + e_- - \bar{\epsilon}) = J^{-1} \Theta(\bar{\epsilon} - (4 + a^2)^{1/2}) \delta(\bar{K} - \bar{K}_0) \quad \text{avec} \quad J = \frac{d}{d\bar{K}}(e_+ + e_-) = \frac{x_+}{e_+} + \frac{x_-}{e_-} \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

Annexe A.2. Dans le cas général

Dans la limite continue du modèle sur réseau, montrons comment exprimer les densités spectrales $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$, $s, s' \in \{-, +\}$, en termes d'intégrales elliptiques comme dans la table 2, en partant de leur définition (13) et en nous limitant au cas $\mu > 0$ et $\epsilon > 2\Delta$. D'abord, on adimensionne comme dans (58,64) puis on intègre (13) en coordonnées sphériques d'axe polaire la direction de \mathbf{q} . L'intégration sur l'angle azimutal est immédiate, puisque l'intégrande n'en dépend pas. On intègre ensuite sur u , cosinus de l'angle polaire, après s'être ramené à $u \geq 0$ par parité de l'intégrande. Il faut pour cela trouver les points d'annulation de l'argument du δ de Dirac dans (13), donc résoudre l'équation $\check{\epsilon} = \check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_-$ sur u , avec $\check{\epsilon}_\pm = \check{\epsilon}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$ (on notera de même $\check{\xi}_\pm = \check{\xi}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$). Posons $a \equiv \check{k}^2 + \frac{1}{4}\check{q}^2 - 1$ et $b \equiv \check{k}\check{q}$, si bien que

$$\check{\xi}_\pm = a \pm bu \quad \text{et} \quad \check{\epsilon}_\pm = [(a \pm bu)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

C'est un reparamétrage astucieux, au sens où $a = 0$ à l'endroit du minimum de $k \mapsto \min_u \epsilon_+ + \epsilon_-$, fonction introduite dans [3] pour déterminer les valeurs extrêmes de k accessibles à $\epsilon_+ + \epsilon_-$ fixé. Récupérons une partie du travail effectué dans la limite d'interaction faible (section Annexe A.1) en utilisant directement les deux extrêmes de la chaîne (A.1) :

$$\check{\epsilon} = \check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_- \Leftrightarrow u^2 = \frac{\check{\epsilon}^2}{4b^2} \check{R} \text{ et } \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4a^2)^2 + 16a^2\check{\Delta}^2}{\check{\epsilon}^2 - 4a^2} \geq 0 \Leftrightarrow u = u_0 \equiv \frac{\check{\epsilon}}{2b} \check{R}^{1/2} \text{ et } -\frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \leq a \leq \frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

avec cette fois $\check{R} = [\check{\epsilon}^2 - 4(a^2 + \check{\Delta}^2)]/(\check{\epsilon}^2 - 4a^2)$, puis en procédant comme dans (A.3) pour calculer $\check{\epsilon}_+ - \check{\epsilon}_-$ en $u = u_0$:

$$\check{\epsilon}_+ - \check{\epsilon}_- = \frac{\check{\xi}_+^2 - \check{\xi}_-^2}{\check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_-} = \frac{4abu_0}{\check{\epsilon}} = 2a\check{R}^{1/2} \implies \check{\epsilon}_+ = \frac{\check{\epsilon}}{2} + a\check{R}^{1/2}, \quad \check{\epsilon}_- = \frac{\check{\epsilon}}{2} - a\check{R}^{1/2}, \quad \check{\xi}_+ = a + \frac{\check{\epsilon}}{2}\check{R}^{1/2}, \quad \check{\xi}_- = a - \frac{\check{\epsilon}}{2}\check{R}^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

Nous obtenons ainsi l'expression du δ de Dirac adaptée à l'intégration polaire :

$$\delta(\check{\epsilon} - \check{\epsilon}_+ - \check{\epsilon}_-) = \frac{\Theta(1 - u_0)}{J} \delta(u - u_0) \quad \text{avec} \quad J = \frac{d}{du}(\check{\epsilon}_+ + \check{\epsilon}_-) = b \left(\frac{\check{\xi}_+}{\check{\epsilon}_+} - \frac{\check{\xi}_-}{\check{\epsilon}_-} \right) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

Comme nous avons tenu compte dans (A.8) de la contrainte géométrique $u_0 \leq 1$ au moyen d'une fonction de Heaviside Θ , on peut intégrer sur $u \in [0, +\infty[$. Il reste à intégrer sur la variable radiale \check{k} , ce qui, à cause de la fonction Θ , n'est pas si simple que ça, le domaine d'intégration se fractionnant en divers sous-intervalles suivant le nombre de racines de l'équation $u_0(\check{k}) = 1$. Expliquons comment procéder sur l'exemple de $\check{\rho}_{+-}$. D'abord, on utilise a plutôt que \check{k} comme variable d'intégration. Ensuite, compte tenu du domaine de variation de a dans (A.6) et du paramétrage hyperbolique (65) de l'énergie $\check{\epsilon}$ par Ω , on pose $a = \frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \sin \theta = \check{\Delta} \text{sh } \Omega \sin \theta$ où $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Alors, en utilisant (10),

$$\check{\rho}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q}) = \int_{-\frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}^{\frac{1}{2}(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} da \frac{4\pi\check{\epsilon}\check{\Delta}^2 a \Theta(1 - u_0)/\check{q}}{(\check{\epsilon}^2 - 4a^2)^{3/2} (\check{\epsilon}^2 - 4(a^2 + \check{\Delta}^2))^{1/2}} = \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \text{sh } \Omega \text{ch } \Omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\Theta(1 - u_0) \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (\text{A.9})$$

Pour connaître le signe de l'argument de Θ suivant la valeur de $s \equiv \sin \theta$, il faut par continuité trouver ses points d'annulation donc résoudre l'équation cubique $u_0^2 = 1$ sur s , c'est-à-dire (71) à un réarrangement trivial près. La discussion graphique de (71) est faite sur le figure 3c et dans la section 4.2.2, rappelons-en ici les conclusions : (i) si $\check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q})$, l'équation admet une seule racine réelle s_3 , qui est > 1 , si bien que $u_0(s) < 1$ pour tout $s \in [-1, 1]$; (ii) si $\check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q})$ (ce qui peut se produire seulement si $\check{q} < \check{q}_0$), l'équation admet trois racines réelles, les deux premières s_1 et s_2 dans $] -1, 1[$, la troisième $s_3 > 1$, si bien que $u_0(s) < 1$ sur $[-1, s_1[\cup]s_2, 1]$; (iii) si $\check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon}$, l'équation admet trois racines réelles, $s_1 < -1$, $s_2 \in] -1, 1[$ et $s_3 > 1$, si bien que $u_0(s) < 1$ sur $]s_2, 1]$. Les énergies critiques $\check{\epsilon}_{2,3}(\check{q})$ et le nombre d'onde critique \check{q}_0 sont définis dans la section 4.2.1. L'intégrale dans le troisième membre de (A.9) s'écrit donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\Theta(1 - u_0) \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} = \begin{cases} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{si } 2\check{\Delta} < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q}) \\ \left(\int_{-\pi/2}^{\text{asin } s_1} + \int_{\text{asin } s_2}^{\pi/2} \right) \frac{d\theta \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{si } \check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q}) \\ \int_{\text{asin } s_2}^{\pi/2} \frac{d\theta \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{si } \check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

L'intégrale du cas (i) dans (A.10) est nulle par imparité de l'intégrande. Dans les autres cas, il reste à effectuer le changement de variable $\theta = \alpha - \pi/2$ dans l'intégrale de borne inférieure $-\pi/2$ et $\theta = \pi/2 - \alpha$ dans l'intégrale de borne supérieure $\pi/2$; on fait ainsi apparaître la fonction $f_{+-}(\psi)$ de (68), exprimable analytiquement de manière simple. Pour les densités spectrales $\check{\rho}_{++}$ et $\check{\rho}_{--}$, on procède de même, si ce n'est qu'il faut reconnaître des intégrales elliptiques, complètes dans le cas (i), incomplètes comme dans (66,67) sinon. On retrouve bien la table 2.

Annexe B. Sur la limite $\Delta/\mu \rightarrow +\infty$

Annexe B.1. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

Il s'agit d'expliquer comment ont été calculés les développements suivants, utiles à l'obtention du résultat (136) sur la branche du continuum de type II (ici, \check{q} et $\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta}$ sont fixés, avec $\text{Im } \check{Z} < 0$) :

$$\begin{aligned} \check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) & \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixés}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \check{\Delta}^{3/4} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}^2}{\check{Z} - \check{K}^4} + \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2}}{\check{K}^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}}\right) + \check{\Delta}^{1/4} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2} (5\check{q}^2 - 12) \check{K}^4}{6(\check{Z} - \check{K}^4)^2} + O(\check{\Delta}^{-1/4}) \\ & = -\frac{(-\check{Z})^{-1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{3/4} + \frac{[\Gamma(3/4)]^2}{4\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} + \frac{(5\check{q}^2 - 12)}{192\pi\sqrt{2}(-\check{Z})^{3/4}} \check{\Delta}^{1/4} + O(\check{\Delta}^{-1/4}) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixés}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} \frac{(-\check{Z})^{3/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-1/4} + \frac{3[\Gamma(3/4)]^2 \check{Z} + 4[\Gamma(5/4)]^2 \check{q}^2}{12\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{-1/2} + \frac{(12 - 13\check{q}^2)(-\check{Z})^{1/4}}{192\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-3/4} + O(\check{\Delta}^{-5/4}) \quad (\text{B.2})$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixés}}{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} + \frac{(-\check{Z})^{1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{1/4} + \frac{(3\check{q}^2 - 4)(-\check{Z})^{-1/4}}{64\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-1/4} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad (\text{B.3})$$

Pour cela, partons des expressions intégrales (8) des éléments de matrice, adimensionnons-les et intégrons formellement sur les angles polaire et azimutal d'axe la direction de \mathbf{q} . Restent des intégrales sur le nombre d'onde relatif \check{k} de certaines fonctions $f(\check{k}, \check{\Delta})$. Appliquons-leur l'analyse multi-échelle expliquée dans le texte au-dessus de (136), ce qui revient à séparer le domaine d'intégration en trois sous-intervalles :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) & = \int_0^{\eta \check{\Delta}^{3/8}} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{\eta \check{\Delta}^{3/8}}^{A \check{\Delta}^{3/8}} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{A \check{\Delta}^{3/8}}^{+\infty} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) \\ & = \int_0^{\eta/\varepsilon} d\check{K}_b \underbrace{\check{\Delta}^{1/4} f(\check{\Delta}^{1/4} \check{K}_b, \check{\Delta})}_{\equiv f_b(\check{K}_b, \varepsilon)} + \int_{\eta}^A d\check{K}_{bc} \underbrace{\check{\Delta}^{3/8} f(\check{\Delta}^{3/8} \check{K}_{bc}, \check{\Delta})}_{\equiv f_{bc}(\check{K}_{bc}, \varepsilon)} + \int_{A\varepsilon}^{+\infty} d\check{K}_c \underbrace{\check{\Delta}^{1/2} f(\check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c, \check{\Delta})}_{\equiv f_c(\check{K}_c, \varepsilon)} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où le petit paramètre est $\varepsilon = \check{\Delta}^{-1/8}$. Les paramètres de coupure η et A sont arbitraires ; à la fin du développement de Taylor en ε , il faudra prendre les limites $A \rightarrow +\infty$ et $\eta \rightarrow 0$ dans le coefficient de chaque puissance ε^n .⁴⁷ Il reste à développer les fonctions f_b , f_c et f_{bc} en puissances de ε à \check{K}_b , \check{K}_c et \check{K}_{bc} fixés, avec des coefficients $f_b^{(n)}$, $f_c^{(n)}$ et $f_{bc}^{(n)}$, puis à intégrer. Si l'intégrale d'un $f_b^{(n)}$ diverge UV ou l'intégrale d'un $f_c^{(n)}$ diverge IR lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il faut sortir un équivalent simple de l'intégrande (typiquement, une somme de lois de puissance en la variable d'intégration) qui laissera derrière lui une intégrale convergente. On rédéveloppe alors le tout en puissances de ε .

Donnons l'exemple de l'élément de matrice \check{M}_{++} , à déterminer avec une erreur relative $O(\varepsilon^8)$ donc une erreur absolue $O(\varepsilon^2)$. Commençons par l'échelle (c). Le développement de Taylor de l'intégrande s'écrit

$$f_c(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2} \varepsilon^{-4}}{\check{K}^2 \sqrt{1 + \check{K}^4}} + f_c^{(4)}(\check{K}) \varepsilon^4 + f_c^{(12)}(\check{K}) \varepsilon^{12} + O(\varepsilon^{20}) \quad (\text{B.5})$$

47. Ce passage à la limite est en fait nécessaire seulement pour \check{M}_{--} . En ce qui concerne \check{M}_{++} et \check{M}_{+-} , la dépendance en A et η disparaît toute seule dans les coefficients des ε^n utiles ici ; on pourrait donc prendre $\eta = A = 1$ ce qui reviendrait à garder pleinement les échelles (b) et (c) mais à introduire l'échelle (bc) seulement comme une coupure.

L'intégrale du premier terme diverge IR lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$; nous passons par une succession de manipulations élémentaires pour la réduire à une somme de lois de puissance :

$$\int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2 \sqrt{1+\check{K}^4}} = \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\check{K}^4}} - 1 \right) + \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\check{K}^4}} - 1 \right) - \int_0^{A\varepsilon} d\check{K} \left[-\frac{1}{2}\check{K}^2 + O(\check{K}^6) \right] + \frac{\varepsilon^{-1}}{A} \\ = -\frac{[\Gamma(3/4)]^2}{\pi^{1/2}} + \frac{A^3}{6}\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^{-1}}{A} + O(\varepsilon^7) \quad (\text{B.6})$$

L'intégrale du deuxième et du troisième terme de (B.5) converge UV mais diverge IR; les mêmes manipulations s'imposent. Il suffit cependant de savoir que

$$f_c^{(4)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2}\check{Z}}{\check{K}^6} + \frac{(2\pi)^{-2}(5\check{q}^2 - 12)}{6\check{K}^4} - \frac{(2\pi)^{-2}\check{Z}}{2\check{K}^2} + O(1) \quad \text{et} \quad f_c^{(12)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow 0}{=} O(1/\check{K}^{10}) \quad (\text{B.7})$$

À l'ordre du calcul, les deux termes les plus divergents de $f_c^{(4)}(\check{K})$ contribuent, et $f_c^{(12)}(\check{K})$ est négligeable. La même procédure est à répéter pour les échelles (bc) et (b). Il suffit ici de savoir que

$$f_{bc}(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2}}{\check{K}^2} \varepsilon^{-5} + (2\pi)^{-2} \left(-\frac{\check{Z}}{\check{K}^6} + \frac{1}{2}\check{K}^2 \right) \varepsilon^{-1} + \frac{(2\pi)^{-2}(5\check{q}^2 - 12)}{6\check{K}^4} \varepsilon + O(\varepsilon^3) \quad (\text{B.8})$$

$$f_b(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{(2\pi)^{-2}\check{K}^2}{\check{Z} - \check{K}^4} \varepsilon^{-6} + \frac{(2\pi)^{-2}(5\check{q}^2 - 12)\check{K}^4}{6(\check{Z} - \check{K}^4)^2} \varepsilon^{-2} + f_b^{(2)}(\check{K})\varepsilon^2 + O(\varepsilon^6) \quad \text{où} \quad f_b^{(2)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow +\infty}{=} (2\pi)^{-2} \frac{\check{K}^2}{2} + O(\check{K}^{-2}) \quad (\text{B.9})$$

On aboutit ainsi au second membre de (B.1), dont le lecteur reconnaîtra ci-dessus tous les éléments.

Annexe B.2. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$

Pour établir l'équation (148) sur le couplage phase-module M_{+-} , nous procédons comme il est expliqué dans le texte qui la précède. Après moyenne angulaire formelle de (8) en coordonnées sphériques d'axe polaire la direction de \mathbf{q} , M_{+-} s'écrit comme une intégrale sur le nombre d'onde \check{k} d'une certaine fonction $F(\check{k}, \check{\Delta})$. Prenons comme petit paramètre $\varepsilon = \check{\Delta}^{-1/8}$, séparons le domaine d'intégration en deux autour de la coupure $\Lambda \check{\Delta}^{1/4}$ (Λ est une constante) et effectuons les changements de variable (130) de type (a) et (c) :

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) = \int_0^{\Lambda \check{\Delta}^{1/4}} d\check{k} F(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{\Lambda \check{\Delta}^{1/4}}^{+\infty} d\check{k} F(\check{k}, \check{\Delta}) = \int_0^{\Lambda \varepsilon^{-2}} d\check{K}_a \underbrace{F(\check{K}_a, \check{\Delta})}_{\equiv F_a(\check{K}_a, \varepsilon)} + \int_{\Lambda \varepsilon^2}^{+\infty} d\check{K}_c \underbrace{\check{\Delta}^{1/2} F(\check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c, \check{\Delta})}_{\equiv F_c(\check{K}_c, \varepsilon)} \quad (\text{B.10})$$

Il reste à développer en puissances de ε sous le signe intégral à \check{K}_a ou \check{K}_c fixé, avec $\check{Q} = \check{\Delta}^{1/2} \check{q}$ et $\check{\zeta}$ défini par (142) fixés,

$$F_a(\check{K}_a, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_a^2 (\check{K}_a^2 - 1)}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} + O\left(\frac{\varepsilon^8}{1 + \check{K}_a^2}\right) \quad \text{et} \quad F_c(\check{K}_c, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{-(2\pi)^{-2} \varepsilon^{-4}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} + O\left(\frac{\varepsilon^4}{\check{K}_c^2}\right) \quad (\text{B.11})$$

puis à intégrer :

$$\int_0^{\Lambda \varepsilon^{-2}} d\check{K}_a F_a^{(0)}(\check{K}_a) = F_a^{(0)}(+\infty) \Lambda \varepsilon^{-2} + \int_0^{+\infty} d\check{K}_a [F_a^{(0)}(\check{K}_a) - F_a^{(0)}(+\infty)] + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{\Lambda \varepsilon^2}^{+\infty} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) = \int_0^{+\infty} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) - \int_0^{\Lambda \varepsilon^2} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} - \Lambda \varepsilon^2 F_c^{(-4)}(0) + O(\varepsilon^{10}) \quad (\text{B.13})$$

Ici, les fonctions $F^{(n)}$ sont les coefficients des termes d'ordre ε^n dans (B.11). Dans (B.12), on a utilisé une astuce moins-plus en soustrayant à l'intégrande sa limite à l'infini. Dans l'intégrale restante, l'intégrande est désormais un $O(1/\check{K}_a^2)$; on peut donc remplacer la borne supérieure par $+\infty$, en commettant une erreur $O(\varepsilon^2)$ négligeable. Dans (B.13), pour passer du deuxième au troisième membre, on a d'abord effectué la première intégrale puis, dans la seconde intégrale, on a approximé l'intégrande par sa valeur en l'origine; comme ce dernier varie quartiquement près de $\check{K}_c = 0$, l'erreur commise est bien un $O(\varepsilon^{10})$. En regroupant les contributions (B.12) et (B.13) dans \check{M}_{+-} avec des poids 1 et ε^{-4} , on constate que les termes linéaires en Λ dans les derniers membres de ces équations se compensent. Il reste (148).

Références

- [1] R. Combescot, M. Yu. Kagan, S. Stringari, « Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. A* **74**, 042717 (2006).
- [2] V.A. Andrianov, V.N. Popov, « Gidrodinamičeskoe dejstvie i Boze-spektr sverhtekučih Fermi-sistem », *Teor. Mat. Fiz.* **28**, 341 (1976) [*Theor. Math. Phys.* **28**, 829 (1976)].
- [3] H. Kurkjian, S.N. Klimin, J. Tempere, Y. Castin, « Pair-Breaking Collective Branch in BCS Superconductors and Superfluid Fermi Gases », *Phys. Rev. Lett.* **122**, 093403 (2019).
- [4] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas, « Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms », *Science* **298**, 2179 (2002).
- [5] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, C. Salomon, « Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a ^6Li Fermi gas », *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020402 (2003).
- [6] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm, « Collective excitations of a degenerate gas at the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. Lett.* **92**, 203201 (2004).
- [7] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, W. Ketterle, « Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance », *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [8] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », *Nature* **463**, 1057 (2010).
- [9] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », *Science* **335**, 563 (2012).
- [10] P. W. Anderson, « Random-phase approximation in the theory of superconductivity », *Phys. Rev.* **112**, 1900 (1958).
- [11] H. Kurkjian, *Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris (2016).
- [12] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas », *Annalen der Physik* **529**, 1600352 (2017).
- [13] Y. Castin, « Simple theoretical tools for low dimension Bose gases », *Cours de l'école de printemps des Houches 2003 Quantum Gases in Low Dimensions*, édité par M. Olshanii, H. Perrin, L. Pricoupenko, *J. Phys. IV France* **116**, 89 (2004).
- [14] V. Gurarie, « Nonequilibrium Dynamics of Weakly and Strongly Paired Superconductors », *Phys. Rev. Lett.* **103**, 075301 (2009).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988).
- [16] P. Nozières, *Le problème à N corps : Propriétés générales des gaz de fermions* (Dunod, Paris, 1963).
- [17] Y. Castin, « Basic tools for degenerate Fermi gases », *Lecture notes of the 2006 Varenna Enrico Fermi School on Fermi gases*, édité par M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon (SIF, 2007).
- [18] A. Schirotzek, Y. Shin, C. H. Schunck, W. Ketterle, « Determination of the superfluid gap in atomic Fermi gases by quasiparticle spectroscopy », *Phys. Rev. Lett.* **101**, 140403 (2008).
- [19] M. Marini, F. Pistolesi, G.C. Strinati, « Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : Analytic results for the crossover in three dimensions », *Eur. Phys. J. B* **1**, 151 (1998).
- [20] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, and products*, édité par A. Jeffrey, 5ème édition (Academic Press, San Diego, 1994).
- [21] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. A* **93**, 013623 (2016).
- [22] S.N. Klimin, H. Kurkjian, J. Tempere, « Anderson-Bogoliubov collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures », *Journal of Low Temperature Physics* **196**, 102 (2019).
- [23] S.N. Klimin, J. Tempere, H. Kurkjian, « Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures », *Phys. Rev. A* **100**, 063634 (2019).
- [24] Z. Hadzibabic, S. Gupta, C.A. Stan, C.H. Schunck, M.W. Zwierlein, K. Dieckmann, W. Ketterle, « Fiftyfold improvement in the Number of Quantum Degenerate Fermionic Atoms », *Phys. Rev. Lett.* **91**, 160401 (2003).
- [25] D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, « Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms », *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090404 (2004).
- [26] A.J. Leggett, « Cooper Pairing in Spin-Polarized Fermi systems », *Journal de physique Colloq.* **41**, C7-19 (1980).
- [27] J.R. Engelbrecht, M. Randeria, C.A.R. Sá de Melo, « BCS to Bose crossover : Broken-symmetry state », *Phys. Rev. B* **55**, 15153 (1997).
- [28] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, *Lecture Notes in Physics* 836, édité par W. Zwerger (Springer, Berlin, 2012).
- [29] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, C. Salomon, « La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions », *Comptes Rendus Physique* **16**, 241 (2015).
- [30] T. Cea, C. Castellani, G. Seibold, L. Benfatto, « Nonrelativistic Dynamics of the Amplitude (Higgs) Mode in Superconductors », *Phys. Rev. Lett.* **115**, 157002 (2015).
- [31] R. Haussmann, M. Punk, W. Zwerger, « Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms », *Phys. Rev. A* **80**, 063612 (2009).