Around Krygin-Atkinson theorem, the recurrence of trajectories with zero integrals

Valery V. Ryzhikov

1 Introduction

Let S be a probability measure-preserving invertible transformation (automorphism) of the space (X, μ), $f : X \to \mathbb{Z}$ be a μ-measurable function. The cylindrical cascade $C : X \times \mathbb{Z} \to X \times \mathbb{Z}$ is defined by the formula

$$C(x, z) = (Sx, z + f(x)),$$

it preserves the measure $\bar{\mu} = \mu \times \sharp$.

Let T_t be a flow preserving the measure μ. The cylindrical flow $C_t : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ is defined similarly:

$$F_t(x, r) = (T_t x, r + \sigma(t, x)),$$

$$\sigma(t, x) := \int_0^t f(T_s x)\, ds.$$

It preserves the measure $\bar{\mu} = \mu \times m$, where m is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$.

Krygin and Atkinson [1],[2] independently proved that the cylindrical cascade with ergodic S and integrable function $f : X \to \mathbb{Z}$ with zero mean are recurrent. This means that for any set $B \subset A$ of positive measure, for almost all points $x \in B$, the points (x, z) return to $B \times \{z\}$ infinitely many times under the action of the cylindrical cascade. Since

$$C^n(x, z) = \left(Sx, z + \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)\right),$$

for Birkhoff sums,

$$\sum_{i=0}^{n_k - 1} f(T^i x) = 0$$

for an infinite set of times n_k. Krygin formulated his result in the case when S is an ergodic rotation, but in the proof he used only the ergodicity property of this automorphism. Atkinson noted this in the abstract of Zbl 0342.60049. In the case where A is additionally a metric space and every open set has positive measure, then the Krygin-Atkinson theorem directly implies for almost all $x \in X$ the existence of a sequence $n_k \to \infty$ for which $T^{n_k} x \to x$ and $\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = 0$.

The case of flows is considered in the paper by Shneiberg [3], in particular, he proved that for an ergodic flow $T_t : X \to X$ and $f : X \to \mathbb{R}$ with zero mean for almost all $x \in X$ there exists a sequence $n_k \to \infty$

$$\sigma(t_k, x) = \int_0^{t_k} f(T_s x)\, ds = 0.$$

In the paper by Denisova [4] the question of when $\sigma(t, x)$ has infinitely many zeros $t_k \to \infty$ in each neighborhood of the point x is studied.

Theorem ([4]). *Let T_t be an ergodic flow on a compact metric space X with finite Caratheodory measure μ, and let $f : X \to \mathbb{R}$ be continuous and have zero mean. Then for almost all x such that $f(x) \neq 0$ there exists a sequence $t_k \to \infty$ such that $\sigma(t_k, x) = 0$ and $T^{n_k} x \to x$.*

Conjecture A. *Let T_t be a special ergodic flow on (X, μ), let $f : X \to \mathbb{R}$ have zero mean, $\mu(A) > 0$. Then for almost all $x \in A$ with $f(x) \neq 0$ there exists a sequence $t_k \to \infty$ such that $\sigma(t_k, x) = 0$ and $T^{n_k} x \in A$.*

If the conjecture is true, then the following statement immediately follows.

Let T_t be an ergodic flow with respect to the measure μ on a metric space X, and let the measure μ of each open set be positive. Suppose that for a function $f : X \to \mathbb{R}$ with zero mean for almost all x the integrals $\sigma(t, x)$ make sense and are continuous in t. Then for almost all x with $f(x) \neq 0$ there is a sequence $t_k \to \infty$ such that $\sigma(t_k, x) = 0$ and $T^{n_k} x \to x$.

2 Cylindrical flows over special flows

A measurable measure-preserving flow is isomorphic to a special flow T_t. We consider the case when the orbits have zero measure. The phase space X for T_t is the part of the plane under the graph of an integrable non-negative function $r : A \to \mathbb{R}^+$, $A \subset \mathbb{R}$. The metric on the phase space is the metric ρ on the plane, and it is locally preserved by the flow. Recall that the point $x = (a, b)$ of the phase space moves vertically upward with a constant velocity: $T_t(a, b) = (a, b + t)$. The boundary of the phase space is glued in such a way that the points $(a, r(a))$ are identified with the points $(P(a), 0)$, where P is a given automorphism on A, the measurable domain of r.

Theorem B. *Let T_t be a special ergodic flow on (X, μ) (or ergodic winding of a torus). For a function $f : X \to \mathbb{R}$ with zero mean for almost all x, for $f(x) \neq 0$ there exists a sequence $t_k \to \infty$ such that $\sigma(t_k, x) = 0$ and $T^{n_k} x \to x$.*

Proof. The function f is integrable on X, from Fubini's theorem it follows that the functions $F(s, x) = f(S_s x)$ for almost all x, as functions of s, are integrable on vertical segments with endpoints $(a, 0)$ and $(a, r(a))$. Therefore, for almost all x, the indefinite integral

$$\Phi(t) = \int_0^{t} f(T_s x)\, ds$$

is an absolutely continuous function on $\mathbb{R}$, hence for almost all t there exists a limit

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int_t^{t+\Delta} f(T_s x)\,ds}{\Delta} = f(T_t x).$$

But then for almost all x there exists a limit

$$\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^{t} f(T_s x)\,ds}{t} = f(x).$$

It follows from this that for almost all x with $f(x)\neq 0$ there exists a number $\delta(x)>0$ such that

$$\int_0^{\delta(x)} f(T_s x)\,ds > f(T_t x)\delta(x)/2.$$

We can obviously choose the function $\delta(x)$ in a measurable way, where $\delta(x)<\delta$ for a predetermined $\delta>0$. Let U denote the intersection of the small disk with the set of x-s for which we have defined $\delta(x)$. Let the measure U be positive. In the phase space of a cylindrical flow, we consider the set

$$E=\{(x,h)\,:\,x\in U, f(x)>0, 0>h>-\delta(x)/4\}.$$

Since the cilindrical flow F_t is recurrent, for any N there is $t>N$

$$\bar{\mu}(F_t E\cap E)>0.$$

Let

$$(T_t x,-h)\in F_t E\cap E,\quad 0<h<\delta(x)/4,$$

then by the continuity of the integral there is $\Delta(x,h)\in(0,\delta(x))$ such that

$$\int_0^{\Delta(x,h)} f(T_s T_t x)\,ds = h.$$

This means that

$$\int_0^{t+\Delta(x,h)} f(T_s T_t x)\,ds = 0,$$

and by choice of U the points x and $T_{t+\Delta(x,h)}x$ may be as close as we want. Let's summarize the above in the following form.

Lemma. *In each set $A\subset\{x: f(x)>0\}$ of positive measure for every N we find positive measure set of $x\in A$ such that there is $t_N(x)>N$ for which the distance between x and $T_{t_N(x)}x$ is less than $1/N$ and*

$$\sigma(t_{N(x)},x) := \int_0^{t_{N(x)}} f(T_s x)\,ds = 0.$$

We call good a points x for which $f(x)\neq 0$ and there is a sequence $t_N\to\infty$ for which $\sigma(t_N,x)=0$ and $\rho(T^{t_N}x,x)<1/N$. A point x is bad if there exists N such that it is N-bad:

for all $t > N$ from $\rho(T^{t_N}x, x) < 1/N$ it follows that $\sigma(t_N, x) \neq 0$. If the measure of bad points is positive, then the measure of N-bad points is positive for some N. But by the lemma there is a point in it that is not N-bad. Thus, the set of bad points has measure 0.

The theorem B is proved for points where $f(x) > 0$, to finis the proof we reason symmetrically for $f(x) < 0$. For an ergodic winding of the torus as T_t, we get the same with the same proof.

3 Remarks

Infinite Krygin-Atkinson Theorem. The following statement is easy to prove by reducing the infinite case to the case of finite measure.

Theorem C. *Let (X, μ) be a standard space with sigma-finite measure, and S an ergodic automorphism of this space. If $f : X \to \mathbb{Z}$ has zero mean, then the cylindrical cascade $C : X \times \mathbb{Z} \to X \times \mathbb{Z}$, $C(x, n) = (Sx, n + f(x))$, is conservative.*

Consider the induced cylindrical cascade on the set $A \times \mathbb{Z}$, $\mu(A) = 1$, $A \subset X$. Let $x \in A$, $n(x)$ satisfy $S^{n(x)} \in A$, $S^k \notin A$, for $0 < k < n(x)$. Put

$$\tilde{S}x = S^{n(x)}x, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n(x)-1} f(S^i x), \ x \in A.$$

We have: $\tilde{S} : A \to A$ is ergodic on A and $\int_A \tilde{f}(x)\, d\mu = 0$. The induced cylindrical cascade $\tilde{C} : A \times \mathbb{Z} \to A \times \mathbb{Z}$ is recurrent, therefore so is the original cascade C.

The bibliography [4] lists many works related to the topic of recurrence of cylindrical cascades, see [5]–[8]. In addition, we note that the Krygin-Atkinson theorem was used by the author to lift the multiple mixing property and to lift the triviality property of pairwise independent joinings, called the del Junco-Rudolph property, see [10]. This property plays an important role in the study of Rokhlin's multiple mixing problem.

Let $n > 2$, an $S^{\otimes n}$-invariant measure on the cube $X^{\times n}$ with projections $\mu^{\otimes 2}$ onto two-dimensional faces. The JR property for S is that each such measure on $X^{\times n}$ is trivial, i.e. equal to $\mu^{\otimes n}$.

Theorem ([9],[10]). *Let $R : X \times Y \to X \times Y$ be the skew product over S defined by*

$$R(x, y) = (S(x), T^{n(x)}(y)), \qquad \int n(x) d\mu = 0.$$

If R, T have mixing and S mixes with multiplicity k, then the skew product R inherits mixing of multiplicity k.

If R, T mix and S has the JR-property, then R inherits the JR-property.

We also note, following Benjamin Weiss, that the integrability of f is not necessary for the recurrence of the cylindrical cascade. Theorem 1.4 [11] implies the following assertion.

Theorem D. *Let (X, μ) be a probability space and S an automorphism of this space. If $f : X \to \mathbb{Z}$ is such that*

$$\mu\left(x : \left|\sum_{0}^{n-1} f(T^i x)\right| > \varepsilon n\right) \to 0,\ n \to \infty,$$

with probability 1 an infinite number of times we observe $\sum_0^{n-1} f(T^i x) = 0$.

Список литературы

[1] A.B. Krygin, An example of a cylindrical cascade with anomalous metric properties, Moscow State University Bulletin, ser. 1, 1975, no. 5, 26-32;

[2] G. Atkinson, Reccurence of co-cycles and random walks, J. London Math. Soc., 13 (1976), 486-488

[3] I.Ya. Shneiberg, Zeros of integrals along trajectories of ergodic systems, Funct. Anal. Appl., 19:2 (1985), 160-161;

[4] N. V. Denisova, Recurrence of integrals of conditionally periodic functions, Dokl. Math., 108:1 (2023), 316-319;

[5] N.G. Moshchevitin, Recurrence of the integral of a smooth three-frequency conditionally periodic function, Math. Notes, 58:5 (1995), 1187-1196

[6] S.V. Konyagin, Recurrence of the integral of an odd conditionally periodic function, Math. Notes, 61:4 (1997), 473-479

[7] V. V. Kozlov, Methods of qualitative analysis in the dynamics of a rigid body. Scientific Publishing Center Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 2000. 248 pp.

[8] A.V. Kochergin, On the Growth of Birkhoff Sums over a Rotation of the Circle, Math. Notes, 113:6 (2023), 784-793

[9] V.V. Ryzhikov, Polymorphisms, joinings, and the tensor simplicity of dynamical systems, Funct. Anal. Appl., 31:2 (1997), 109-118

[10] V.V. Ryzhikov, Self-joinings and generic extensions of ergodic systems, Funct. Anal. Appl., 57:3 (2023), 236-247

[11] B. Weiss, Single orbit dynamics. BMS Regional Conference Series in Mathematics 95. Providence, RI: AMS, 113 p. (2000).

Вокруг теоремы Крыгина-Актинсона, возвратность траекторий с нулевым интегралом.

Пусть S – сохраняющее вероятностную меру обратимое преобразование (автоморфизм) пространства (X, μ), $f : X \to \mathbb{Z}$ – μ-измеримая функция.

Цилиндрический каскад $C : X \times \mathbb{Z} \to X \times \mathbb{Z}$ определен формулой

$$C(x, z) = (Sx, z + f(x)),$$

сохраняет меру $\bar{\mu} = \mu \times \sharp$.

Пусть T_t – поток, сохраняющий меру μ. Цилиндрический поток $C_t : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ задается аналогично:

$$F_t(x, r) = (T_t x, r + \sigma(t, x)),$$

$$\sigma(t, x) := \int_0^t f(T_s x)\, ds.$$

Он сохраняет меру $\bar{\mu} = \mu \times m$, где m – мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Крыгин и Аткинсон [1],[2] независимо доказали, что цилиндрический каскад с эргодическим S и интегрируемой функцией $f : X \to \mathbb{Z}$ с нулевым средним являются рекуррентными. Это означает, что для всякого множества $B \subset A$ положительной меры для почти всех точек $x \in B$ верно, что точки (x, z) под действием цилиндрического каскада бесконечное число раз возвращаются в $B \times \{z\}$. Так как

$$C^n(x, z) = \left(Sx, z + \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)\right),$$

для сумм Биркгофа выполнено

$$\sum_{i=0}^{n_k - 1} f(T^i x) = 0$$

для бесконечного множества моментов времени n_k. Крыгин сформулировал свой результат в случае, когда S – эргодический поворот, но в доказательстве использовал только свойство эргодичности этого автоморфизма. Аткинсон отметил это в автореферате Zbl 0342.60049. В случае, когда A дополнительно является метрическим пространством и всякое открытое множество имеет положительную меру, то непосредственно из теоремы Крыгина-Аткинсона вытекает для почти всех $x \in X$ существование последовательности $n_k \to \infty$, для которой $T^{n_k} x \to x$ и $\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = 0$.

Случай потоков рассмотрен в работе Шнейберга [3], в частности, им доказано, что для эргодического потока $T_t : X \to X$ и $f : X \to \mathbb{R}$ с нулевым средним для почти всех $x \in X$ найдется последовательность $n_k \to \infty$

$$\sigma(t_k, x) = \int_0^{t_k} f(T_s x)\, ds = 0.$$

В статье Денисовой [4] изучается вопрос о том, когда $\sigma(t, x)$ имеет бесконечно много нулей $t_k \to \infty$ в каждой окрестности точки x.

Теорема ([4]). *Пусть T_t – эргодический поток на компактном метрическом пространстве X с конечной мерой Каратеодори μ, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет нулевое среднее значение. Тогда для почти всех x таких, что $f(x) \neq 0$ найдется последовательность $t_k \to \infty$ такая, что $\sigma(t_k, x) = 0$ и $T^{n_k}x \to x$.*

Гипотеза А. *Пусть T_t – специальный эргодический поток на (X, μ), функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет нулевое среднее, $\mu(A) > 0$. Тогда для почти всех $x \in A$ при $f(x) \neq 0$ найдется последовательность $t_k \to \infty$, для которой $\sigma(t_k, x) = 0$ и $T^{n_k}x \in A$.*

Если гипотеза верна, то из нее сразу вытекает следующее утверждение.

Пусть T_t – эргодический относительно меры μ поток на метрическом пространстве X, мера μ каждого открытого множества положительна. Предположим, что для функции $f : X \to \mathbb{R}$ с нулевым средним для почти всех x интегралы $\sigma(t, x)$ имеют смысл и непрерывны по t. Тогда для почти всех x при $f(x) \neq 0$ найдется последовательность $t_k \to \infty$, для которой $\sigma(t_k, x) = 0$ и $T^{n_k}x \to x$.

Цилиндрические потоки над специальным потоком. Измеримый поток, сохраняющий меру, изоморфен специальному потоку T_t. Мы рассматриваем случай, когда орбиты имеют меру 0. Фазовое пространство X для T_t является частью плоскости под графиком интегрируемой неотрицательной функции $r : A \to \mathbb{R}^+$, $A \subset \mathbb{R}$. Метрика на фазовом пространстве есть метрика ρ на плоскости и она локально сохраняется потоком. Напомним, что точка $x = (a, b)$ фазового пространства движется вертикально вверх с постоянной скоростью: $T_t(a, b) = (a, b + t)$. Граница фазового пространства склеена таким образом, что точки $(a, r(a))$ отождествляется с точками $(P(a), 0)$, где P – заданный автоморфизм на A – измеримой области определения функции r.

Теорема В. *Пусть T_t – специальный эргодический поток на (X, μ) (или эргодическая обмотка тора). Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ с нулевым средним для почти всех x при $f(x) \neq 0$ найдется последовательность $t_k \to \infty$, для которой $\sigma(t_k, x) = 0$ и $T^{n_k}x \to x$.*

Доказательство. Функция f интегрируема на X, bз теоремы Фубини следует, что функции $F(s, x) = f(S_s x)$ для почти всех x как функции от s интегрируемы на вертикальных отрезках с концами $(a, 0)$ и $(a, r(a))$. Поэтому для почти всех x неопределенный интеграл

$$\Phi(t) = \int_0^t f(T_s x)\, ds$$

является абсолютно непрерывной функцией на $\mathbb{R}$, следовательно для почти всех t существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta} f(T_s x)\, ds}{\Delta} = f(T_t x).$$

Но тогда для почти всех x существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t f(T_s x)\, ds}{t} = f(x).$$

Из этого вытекает, что для почти всех x при $f(x) \neq 0$ найдется число $\delta(x) > 0$ такое, что

$$\int_0^{\delta(x)} f(T_s x)\, ds > f(T_t x)\delta(x)/2.$$

Функцию $\delta(x)$ мы, очевидно, можем выбрать измеримым образом, причем $\delta(x) < \delta$ для наперед заданного $\delta > 0$. Пусть U обозначает пересечение маленького диска с множеством таких x-ов, для которых мы определили $\delta(x)$. Пусть мера U положительна. В фазовом пространстве цилиндрического потока расмотрим множество

$$E = \{(x,h) \,:\, x \in U, f(x) > 0, 0 > h > -\delta(x)/4\}.$$

Так как цилиндрический поток F_t рекуррентный, для всякого N найдется найдется $t > N$ такое, что

$$\bar{\mu}(F_t E \cap E) > 0.$$

Пусть

$$(T_t x, -h) \in F_t E \cap E, \quad 0 < h < \delta(x)/4,$$

в силу непрерывности интеграла найдется $\Delta(x,h) < \delta(x)$ такое, что

$$\int_0^{\Delta(x,h)} f(T_s T_t x)\, ds = h.$$

Это означает, что

$$\int_0^{t+\Delta(x,h)} f(T_s T_t x)\, ds = 0,$$

причем x и $T_{t+\Delta(x,h)}$ близки. Подведем итог сказанному.

Лемма. *В каждом множестве $A \subset \{x : f(x) > 0\}$ положительной меры для всякого N и найдется множество положительной меры таких x, что для некоторого $t_N(x) > N$ расстояние между x и $T_{t_N(x)}x$ меньше $1/N$ и*

$$\sigma(t_{N(x)}, x) := \int_0^{t_{N(x)}} f(T_s x)\, ds = 0.$$

Назовем хорошими точки x, для которых $f(x) \neq 0$ и найдется последовательность $t_N \to \infty$, для которой $\sigma(t_N, x) = 0$ и $\rho(T^{t_N}x, x) < 1/N$. Точка x плохая, если найдется такое N, что она N-плохая: для всех $t > N$ из $\rho(T^{t_N}x, x) < 1/N$ вытекает $\sigma(t_N, x) \neq 0$. Если мера плохих точек положительна, то мера N-плохих точек положительна для некоторого N. Но в силу леммы в ней найдется точка, которая не является N-плохой. Таким образом, множество плохих точек имеет меру 0.

Теорема доказана для точек, где $f(x) > 0$, симметрично рассуждаем при $f(x) < 0$. Теорема B доказана.

Если в качестве T_t взять эргодическую обмотку тора, то получаем идентичный результат с идентичным доказательством.

Бесконечная теорема Крыгина-Аткинсона.

Теорема C. *Пусть* (X, μ) *– стандартное пространство с сигма-конечной мерой,* S *– эргодический автоморфизм этого пространства. Если* $f : X \to \mathbb{Z}$ *имеет нулевое среднее, то цилиндрический каскад* $C : X \times \mathbb{Z} \to X \times \mathbb{Z}$, $C(x, n) = (Sx, n + f(x))$, *является консервативным.*

Это утверждение несложно доказать, сведя случай бесконечной меры к случаю конечной меры. Рассмотрим индуцированный цилиндрический каскад на множестве $A \times \mathbb{Z}$, $\mu(A) = 1$, $A \subset X$. Пусть $x \in A$ и для $n(x)$ выполнено $S^{n(x)} \in A$, $S^k \notin A$, при $0 < k < n(x)$. Положим

$$\tilde{S}x = S^{n(x)}x, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n(x)-1} f(S^i x), \; x \in A.$$

Имеем: $\tilde{S} : A \to A$ эргодичен на A и $\int_A \tilde{f}(x)\, d\mu = 0$. Индуцированный цилиндрический каскад $\tilde{C} : A \times \mathbb{Z} \to A \times \mathbb{Z}$ рекуррентен, следовательно, таков и исходный каскад C.

В библиографии [4] указано множество работ, связанных с тематикой рекуррентности цилиндрических каскадов, см. [5]–[8]. В дополнение к этому, отметим, что теорему Крыгина-Аткинсона автор использовал для поднятия свойства кратного перемешивания и поднятия свойства тривиальности джойнингов с попарной независимостью, названного свойством дель Джунко-Рудольфа, см. [10]. Это свойство играет важную роль в исследовании проблемы Рохлина о кратном перемешивании. Пусть $n > 2$, $S^{\otimes n}$-инвариантная мера на кубе с проекциями $\mu^{\otimes 2}$ на двумерные грани называется попарно независимым самосоединением автоморфизма S. JR-свойство для автоморфизма S означает, что каждое такое самоприсоединение на $X^{\times n}$ тривиально, является мерой $\mu^{\otimes n}$.

Теорема ([9]). *Пусть* $R : X \times Y \to X \times Y$ *– косое произведение над автоморфизмом* S, *заданное формулой*

$$R(x, y) = (S(x), T^{n(x)}(y)), \qquad \int n(x) d\mu = 0.$$

Если R, T *обладают перемешиванием, а автоморфизм* S *перемешивает с кратностью* k, *то косое произведение* R *наследует перемешивание кратности* k.

Если R, T *перемешмвают и* S *обладает JR-свойством, то* R *наследует JR-свойство.*

Отметим также, следуя Бенжамину Вейсу, что интегрируемость функции f не обязательна для рекуррентности цилиндрического каскада. Из теорема 1.4 [11] вытекает следующее утверждение.

Теорема D. *Пусть* (X, μ) *– вероятностное пространство,* S *– автоморфизм этого пространства. Если* $f : X \to \mathbb{Z}$ *такова, что*

$$\mu\left(x : \left|\sum_{0}^{n-1} f(T^i x)\right| > \varepsilon n\right) \to 0, \; n \to \infty,$$

с вероятностью 1 бесконечное число раз мы наблюдаем $\sum_0^{n-1} f(T^i x) = 0$.

Список литературы

[1] A.B. Krygin, An example of a cylindrical cascade with anomalous metric properties, Moscow State University Bulletin, ser. 1, 1975, no. 5, 26-32;

А.Б. Крыгин, Пример цилиндрического каскада с аномальными метрическими свойствами, Вестник МГУ, сер. 1, 1975, № 5, 26-32

[2] G. Atkinson, Reccurence of co-cycles and random walks, J. London Math. Soc., 13 (1976), 486-488

[3] I.Ya. Shneiberg, Zeros of integrals along trajectories of ergodic systems, Funct. Anal. Appl., 19:2 (1985), 160-161;

И.Я. Шнейберг, Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем, Функц. анализ и его прил., 19:2 (1985), 92-93

[4] N. V. Denisova, Recurrence of integrals of conditionally periodic functions, Dokl. Math., 108:1 (2023), 316-319;

Н.В. Денисова, Возвращаемость интегралов условно периодических функций, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 512 (2023), 85-88

[5] Н.Г. Мощевитин, О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условнопериодической функции, Матем. заметки, 58:5 (1995), 723-735;

N.G. Moshchevitin, Recurrence of the integral of a smooth three-frequency conditionally periodic function, Math. Notes, 58:5 (1995), 1187-1196

[6] С.В. Конягин, О возвращаемости интеграла нечетной условнопериодической функции, Матем. заметки, 61:4 (1997), 570-577;

S.V. Konyagin, Recurrence of the integral of an odd conditionally periodic function, Math. Notes, 61:4 (1997), 473-479

[7] В.В. Козлов, Методы качественного анализа в динамике твердого тела, РХД, Ижевск, 2000

V. V. Kozlov, Methods of qualitative analysis in the dynamics of a rigid body. Scientific Publishing Center Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 2000. 248 pp.

[8] А.В. Кочергин, О росте сумм Биркгофа над поворотом окружности, Матем. заметки, 113:6 (2023), 836-848;

A.V. Kochergin, On the Growth of Birkhoff Sums over a Rotation of the Circle, Math. Notes, 113:6 (2023), 784-793

[9] В. В. Рыжиков, Полиморфизмы, джойнинги и тензорная простота динамических систем, Функц. анализ и его прил., 31:2 (1997), 45-57

V.V. Ryzhikov, Polymorphisms, joinings, and the tensor simplicity of dynamical systems, Funct. Anal. Appl., 31:2 (1997), 109-118

[10] V.V. Ryzhikov, Self-joinings and generic extensions of ergodic systems, Funct. Anal. Appl., 57:3 (2023), 236-247

В. В. Рыжиков, Самоприсоединения и типичные расширения эргодических систем, Функц. анализ и его прил., 57:3 (2023), 74-88

[11] B. Weiss, Single orbit dynamics. BMS Regional Conference Series in Mathematics 95. Providence, RI: AMS, 113 p. (2000).