

ВЕЙВЛЕТ-РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ С ШУМОМ

И. А. Патрикеев, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик
Институт Механики Сплошных Сред, ул. Королева 1, 614013, г. Пермь

13 августа 2018 г.

Аннотация

Рассматриваются различные алгоритмы приближенного вычисления производной функции, заданной неточно. Алгоритм дифференцирования с использованием вейвлет-преобразования сравнивается с алгоритмом на основе преобразования Фурье и алгоритмами вычисления производной в физическом пространстве. Проведена численная оценка погрешности вычислений различных алгоритмов на модельных примерах.

УДК 621.372

Ключевые слова: вейвлет, дифференцирование, фильтрация шума, регуляризация

1 Введение

Задача о численном дифференцировании функции, известной приближенно, является классическим примером некорректно поставленной задачи, приводящей к неустойчивости решения [1]. Для обеспечения устойчивости по Тихонову точное решение заменяют приближенным, которое управляется параметром регуляризации α и стремится к точному при отсутствии погрешности измерений (подробнее о различных вариантах стабилизации решения см. в [1, 2, 3]). На практике регуляризация обычно сводится либо к сглаживанию исходных данных в физическом пространстве, либо к подавлению высоких частот в спектре измеренных данных. При этом оптимальная ширина сглаживающего окна или соответствующая ему полоса пропускания фильтра связывается с ожидаемым уровнем шума.

Представляется целесообразным сформулировать задачу регуляризации операции дифференцирования зашумленных данных на языке вейвлет-представления сигналов, которое позволяет естественным образом совместить преимущества работы в физическом пространстве и пространстве Фурье. Вейвлет-анализ, превратившийся за последнее десятилетие в хорошо развитый раздел функционального анализа (см., например [4]), показал свою эффективность в задачах, связанных с обработкой всевозможных многомасштабных сигналов и полей.

Первые попытки использования аппарата вейвлет-анализа при нахождении производной зашумленных данных были выполнены в работах [5, 6, 7, 8]. В данной работе методика вейвлет-дифференцирования описывается в рамках общей проблемы без привязки к специфике сигнала. При этом проводится систематическое сравнение вейвлет-регуляризации в задаче дифференцирования зашумленных сигналов с другими общеизвестными подходами. Эффективность использования демонстрируется на конкретных примерах.

2 Методы численного дифференцирования

Пусть функция $f(x)$ имеет первую производную $g(x)$, так что

$$f(x) = \int_0^x g(x) dx \quad (1)$$

и определена на наборе точек x_n с точностью до некоторой случайной ошибки ξ

$$\tilde{f}_n = f(x_n) + \xi. \quad (2)$$

Производная $g(x)$ выражается через $f(x)$

$$g(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (3)$$

и в простейшем случае может быть приближенно вычислена как

$$\tilde{g}_n = \frac{\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}}{\Delta x}, \quad (4)$$

где $\Delta x = x_n - x_{n-1}$.

В условиях шума формула (4) может стать неустойчивой. Принимая для случайной ошибки оценку $|\xi| \leq A$, можно записать

$$|g_n| \leq \left| \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{\Delta x} \right| + 2A/\Delta x. \quad (5)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ первое слагаемое в правой части (5) стремится к $g(x)$, а второе может быть сколь угодно большим. Так, в частности, если функция задана на конечном интервале, то увеличение числа точек приводит к увеличению второго слагаемого в (5).

2.1 Дифференцирование в физическом пространстве

В теории обобщенных функций [9] вводится δ -функция, задаваемая неявно как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{0-}^{0+} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad (6)$$

где $f(x)$ - гладкая функция.

Известно, что δ -функция дифференцируема. Ее первая производная, обозначаемая $\dot{\delta}$ и называемая "дублет", обладает свойством

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\dot{\delta}(x-x')dx' = \int_{0-}^{0+} f(x-x')\dot{\delta}(x')dx'. \quad (7)$$

Отметим, что функция $\dot{\delta}$ нечетна и сосредоточена в бесконечно малой окрестности точки $x = x'$. Функцию $\dot{\delta}$ называют иногда *бесконечно малым диполем*.

2.2 Дифференцирование в пространстве Фурье

По теореме о производной [10] дифференцирование в физическом пространстве сводится к умножению в частотном пространстве. Фурье-образы функций g и f связаны соотношением

$$\hat{g}(k) = ik\hat{f}(k), \quad (8)$$

где $\hat{f}(k)$ - результат преобразования Фурье

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx. \quad (9)$$

Таким образом, находя Фурье-образ сигнала $\hat{f}(k)$, умножая его в частотном пространстве на ik и выполняя обратное преобразование Фурье, можно найти производную $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \right) e^{ikx}dk. \quad (10)$$

Отметим, что фильтр ik имеет импульсную характеристику $\dot{\delta}$. То есть

$$ik = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(x) e^{-ikx} dx. \quad (11)$$

Принципиальное отличие алгоритма (10) от прямого дифференцирования в физическом пространстве заключается в том, что при вычислении преобразования Фурье используется информация о сигнале во всех точках числовой оси, в то время как дифференцирование является по определению операцией локальной.

2.3 Дифференцирование с использованием вейвлет-преобразования

С точки зрения локальности, метод дифференцирования на основе вейвлет-анализа занимает промежуточное положение между дифференцированием в физическом пространстве и в пространстве Фурье. Вейвлет-образ исходной функции $f(x)$ есть

$$W_{a,b}\{f\} = \int \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) f(x) dx, \quad (12)$$

где в качестве анализирующего вейвлета $\psi(x)$ используется комплексная или действительная функция, локализованная как в физическом пространстве, так и в пространстве Фурье, а параметры a и b определяют, соответственно, масштаб и положение функции $\psi_{a,b} = \psi \left(\frac{x-b}{a} \right)$.

Записывая аналогичным образом вейвлет-образ функции $g(x)$ и проводя дифференцирование по частям, легко получить

$$W_{a,b}\{g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^*(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi_{a,b}^*(x)}{\partial x} f(x) dx \quad (13)$$

Таким образом, выполнив вейвлет-разложение функции $f(x)$ по семейству $-\frac{\partial \psi_{a,b}(x)}{\partial x}$, и выполнив затем обратное вейвлет-преобразование с помощью вейвлет-семейства $\psi_{a,b}(x)$, можно получить искомую функцию $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{C} \int_{0+}^{\infty} \frac{da}{a^3} \int_{-\infty}^{\infty} db \psi_{a,x}(b) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \chi_{a,b}^*(x) f(x) \right), \quad (14)$$

где χ - анализирующий вейвлет, ψ - синтезирующий вейвлет, и C - константа, определяемая выражением

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(k)| |\hat{\chi}(k)|}{|k|} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 dk < \infty. \quad (15)$$

Выбор пары χ и ψ (для анализа и синтеза соответственно) из условия

$$\chi(x) = -\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}, \quad (16)$$

предполагает, что производная от ψ существует и является вейвлетом.

Например, пара функций $\chi = (1-x^2) \exp(-x^2/2)$ и $\psi = -x \exp(-x^2/2)$ удовлетворяет условию (16). В принципе, любой вейвлет, имеющий первую производную, можно использовать в качестве ψ . На практике, выбор конкретной пары вейвлетов осуществляется с учетом специфики постановки задачи.

В качестве предельного случая можно использовать пару функций $\chi = \dot{\delta}$ и $\psi = \delta$. Подставляя в уравнение (14) и рассматривая δ -функцию, как сингулярный вейвлет [4], получаем

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x') \delta(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \dot{\delta}(x-x'). \quad (17)$$

3 Регуляризация алгоритмов дифференцирования

Рассмотренные выше алгоритмы не являются устойчивыми и для использования на практике требуют регуляризации.

3.1 Приближенное вычисление производной в физическом пространстве

Для практического использования необходимо провести регуляризацию уравнения свертки (7). Свертка с аппроксимирующей дублет функцией, ширина которой управляется параметром регуляризации α , дает приближенное значение производной. Обобщенная функция δ аппроксимируется регулярной нечетной функцией с нулевым средним значением, область локализации которой определяется ожидаемым уровнем шума. Простейшей аппроксимацией дублета на дискретном множестве является вычисление разности в соседних точках. Устойчивость можно обеспечить, увеличив расстояние между точками, в которых вычисляется разность. Такой метод известен со времен Ньютона [1].

Одним из практических методов оценки производной в физическом пространстве является свертка измеренного сигнала со сглаживающим окном (Хэмминга, Винера и др. [2, 11]), с последующим вычислением производной в виде конечной разности (4). Сглаженный сигнал находится по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')u_{\alpha}(x-x')dx', \quad (18)$$

где u - сглаживающее окно, ширина которого управляется регуляризирующим параметром α .

Применяемое на практике усреднение по соседним точкам эквивалентно сглаживанию прямоугольным окном. Численная оценка погрешности вычисления производной в физическом пространстве (при использовании различных сглаживающих окон) будет дана ниже.

3.2 Приближенное вычисление производной в пространстве Фурье

Как альтернативу свертке со сглаживающим окном в физическом пространстве рассмотрим умножение на фильтр низких частот (ФНЧ) в частотной области. Идеальный ФНЧ отсекает все частоты, выше $k_0(\alpha)$. Сигнал, пропущенный через идеальный ФНЧ, не будет иметь высоких частот, то есть будет сглаженным. После выполнения обратного преобразования Фурье дифференцирование производится методом конечной разности.

Можно объединить в частотной области обе операции - обеспечения устойчивости путем подавления высоких частот и вычисления производной путем умножения на ik . Алгоритм (10) в условиях шума является неустойчивым, так как умножение на ik приводит к неограниченному усилению высоких частот. Для обеспечения устойчивости используется ФНЧ с шириной полосы пропускания, управляемой регуляризирующим параметром (при $\alpha \rightarrow 0$, полоса пропускания стремится к бесконечности и приближенное решение стремится к точному). Форма фильтра может выбираться достаточно произвольно, исходя из специфики задачи. Ниже будут рассмотрены два фильтра: дифференцирующий фильтр, представляющий собой произведение ik и идеального ФНЧ, и дифференцирующий гауссов фильтр - произведение ik и гауссова фильтра.

3.3 Вейвлет-регуляризация

При использовании вейвлет-алгоритма вместо свертки сигнала с дублетом выполняется анализ с использованием вейвлета χ и последующий синтез с использованием вейвлета ψ .

Интегрирование по a на этапе синтеза на практике осуществляется в конечных пределах от a_{min} до a_{max} . В случае высокочастотного шума выбор a_{min} необходимо связать с ожидаемым уровнем шума. В простейшем случае пределы интегрирования по a выбираются на основании интегральных критериев и не учитывают поведение функции и особенности шума в различные моменты времени. Преимущество вычисления с помощью вейвлетов состоит в том, что легко реализовать локальную регуляризацию, когда пределы интегрирования адаптируются под локальные свойства вейвлет-спектра, т.е. a_{min} зависит от x .

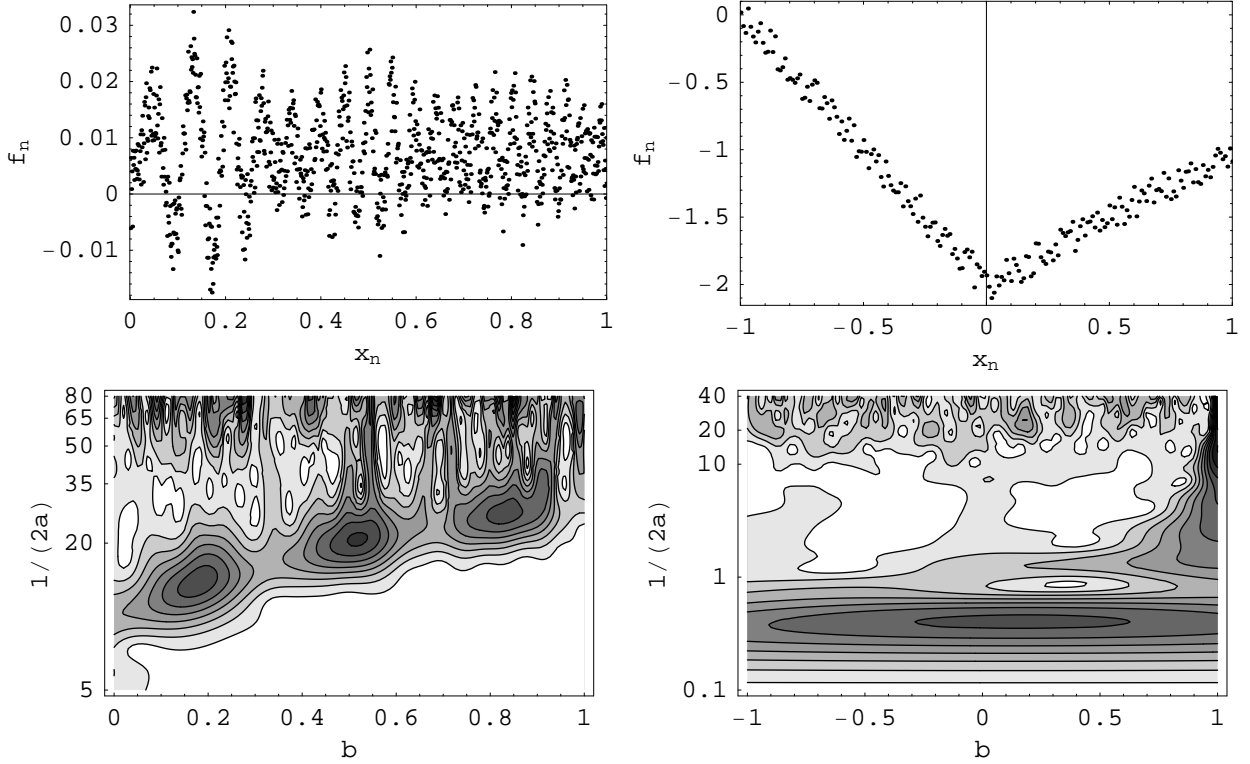


Рис. 1: Модельные сигналы с аддитивным белым шумом (*вверху*) и соответствующие вейвлет-образы (*внизу*).

4 Примеры

Выбор оптимального способа дифференцирования зависит, безусловно, от вида сигнала и характеристик шума. Мы ограничимся рассмотрением двух характерных примеров. Первый пример представляет сигнал, основная энергия которого сосредоточена в высокочастотной части спектра (периоды характерных колебаний существенно меньше длины интервала, на котором задан сигнал). В этом случае можно считать, что сигнал задан на неограниченном отрезке или является периодическим, что позволяет избежать проблем, связанных с границами области определения. В качестве второго примера выбрана кусочно-гладкая функция.

Первый пример представляет собой заданный на интервале от 0 до 1 с шагом 0.001 осциллирующий сигнал, модулированный по частоте и амплитуде, искомая производная которого определяется по формуле

$$g(x) = \sin(2\pi x(10x + 10))(1 - 1/2 \cos(6\pi x)). \quad (19)$$

Производная второго модельного сигнала определяется выражением

$$g(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Второй сигнал более гладкий и не имеет высокочастотной составляющей за исключением области разрыва производной. Этот сигнал задан только в интервале от -1 до 1 и ограниченность области определения оказывает прямое влияние на дифференцирование.

Для каждого из модельных сигналов были сформированы наборы точек f_n по формуле

$$f_n = \int_{x_0}^{x_n} g(x) dx + \xi(\mu), \quad (21)$$

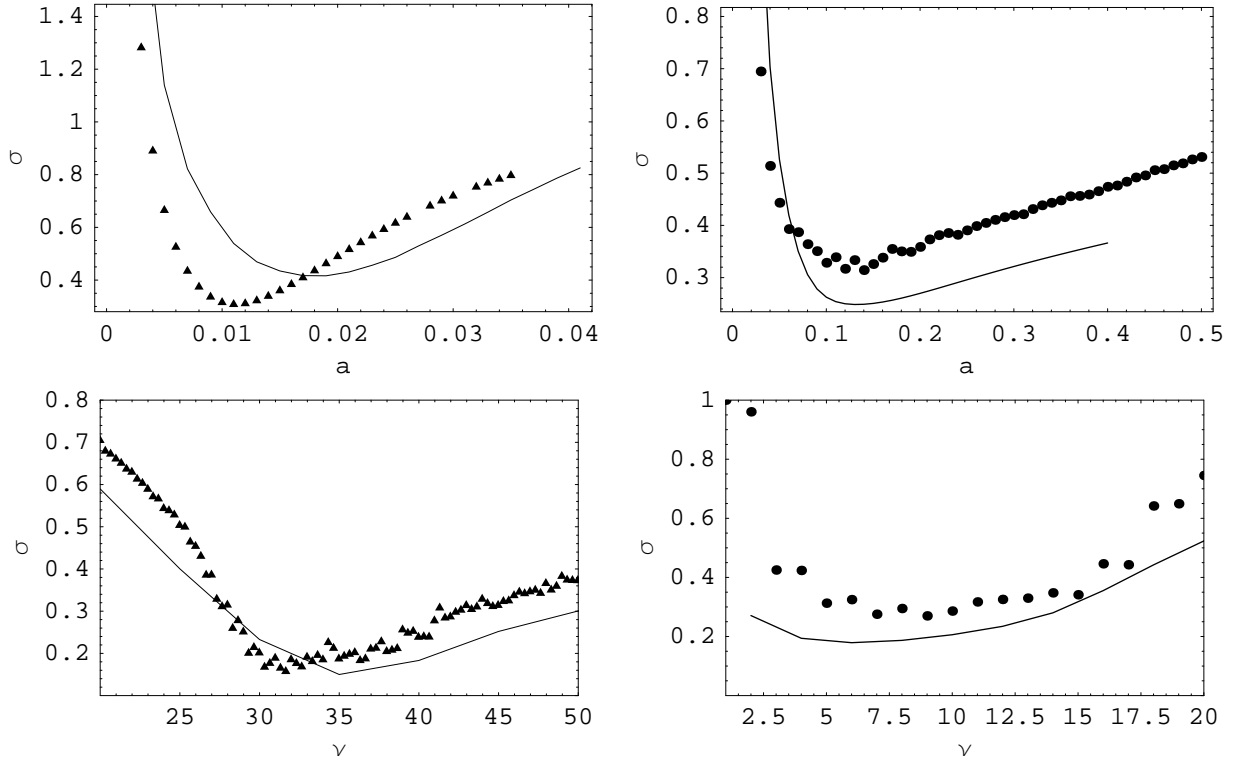


Рис. 2: Зависимость среднеквадратичной ошибки дифференцирования (пример 1 - слева, пример 2 - справа) от ширины окна в физическом пространстве: прямоугольное окно - линия, гауссово окно - точки (*вверху*); в частотном пространстве: прямоугольный ФНЧ - точки, вейвлет-дифференцирование - линия (*внизу*).

где $\xi(\mu)$ - белый шум с уровнем $\mu * 100\%$ от среднего абсолютного значения функции.

Полученные распределения представлены на Рис. 1. Уровень шума составлял 30% для первого сигнала (Рис. 1, слева) и 10% для кусочно-гладкого примера (Рис. 1, справа). В высокочастотной части соответствующих вейвлет-образов (Рис. 1, внизу) наблюдаются нерегулярные структуры, вызванные добавлением шума.

Массивы значений f_n использовались для численного вычисления производной g_n различными алгоритмами и сравнения с аналитическими значениями производной $g(x_n)$. Среднеквадратичная ошибка (СКО) дифференцирования определялась по формуле [2]

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_n (g_n - g(x_n))^2}{\sum_n g(x_n)^2}}, \quad (22)$$

где $g(x_n)$ - значения производной модельного сигнала в точках x_n , g_n - результат численного дифференцирования.

В данной работе сравнивались следующие алгоритмы:

Прямоугольное окно в физическом пространстве + конечная разность. Сигнал усреднялся по соседним точкам и затем применялся метод конечной разности для оценки производной. Оптимальное значение ширины окна, минимизирующее σ , определялось путем варьирования количества точек, по которым проводится усреднение, и последующим сравнением с аналитическим решением. Оптимальное значение ширины окна имеет значение 0.018 для первого сигнала и 0.14 - для второго сигнала. Минимальные значения σ приведены в Таблице 1. Графически зависимость σ от ширины окна показана на Рис. 2.

Гауссово окно в физическом пространстве + конечная разность. Аналогичным образом определялось оптимальное значение ширины гауссова окна (на уровне половины от максимального значения). Оптимальное значение ширины окна равно 0.011 для первого сигнала и 0.31 - для второго сигнала. Минимальные

Метод	Минимальное значение σ	
	Пример 1	Пример 2
Прямоугольное окно	0.42	0.31
Гауссово окно	0.31	0.25
Фурье (ФНЧ)+кон.разн.	0.16	0.8
Фурье гаусс + кон.разн.	0.16	0.7
Дифференцирующий фильтр	0.18	0.27
Диф.гаусс фильтр	0.3	0.32
Вейвлет-регуляризация (Морле)	0.15	0.2
Вейвлет $a_{min} = (20 * x + c)^{-1}$	0.12	-

Таблица 1: Сравнение эффективности фильтрации шума при вычислении производной.

значения σ - в Таблице 1. Сравнивая графики зависимости σ от ширины окна (Рис. 2), можно видеть, что гауссово окно дает более точное восстановление производной, чем прямоугольное.

ФНЧ в частотном пространстве + конечная разность. Оптимальное значение частоты отсечки k_0 , минимизирующее σ , определялось следующим образом: вычислялось FFT сигнала, отбрасывались коэффициенты ряда Фурье, соответствующие частотам $k > k_0$, а затем выполнялось обратное FFT и применялся метод конечной разности. Зависимость σ от k_0 представлена на Рис.2. Графически зависимость σ от k_0 показана на Рис. 2. Минимальное значение σ , достигаемое при использовании идеального фильтра низких частот, - в Таблице 1.

Гауссов фильтр в частотном пространстве + конечная разность. Фильтр получается заменой прямоугольного ФНЧ на гауссов. Зависимость σ от ширины фильтра в частотном пространстве находилась следующим образом: вычислось FFT сигнала, умножались коэффициенты ряда Фурье на гауссов фильтр, а затем выполнялось обратное FFT и применялся метод конечной разности. Оптимальное значение ширины фильтра равно 32 для первого примера и 1 - для второго примера. Минимальные значение σ - в Таблице 1.

Дифференцирующий фильтр в частотном пространстве. Умножение идеального ФНЧ на ik дает фильтр специальной формы, осуществляющий в частотной области вычисление производной одновременно со сглаживанием. Такой фильтр, а также его ближайшие родственники, используются в томографии для вычисления обратного преобразования Радона [2, 12]. Оптимальное значение частоты отсечки k_0 равно 32 для первого примера и 8 - для второго примера. Минимальные значение σ - в Таблице 1.

Дифференцирующий гауссов фильтр в частотном пространстве. Модифицируем предыдущий фильтр, заменив идеальный ФНЧ на гауссов фильтр. Умножив в частотном пространстве гауссов фильтр на ik , получим фильтр $ik \exp(-k^2)$, импульсная характеристика которого равна первой производной от гауссова окна. Варьируя ширину фильтра в частотной области, найдем значение параметра масштаба, минимизирующее σ . Оптимальное значение ширины фильтра равно 37 для первого примера и 10 - для второго примера. Минимальные значения σ представлены в Таблице 1.

Вейвлет Морле в физическом пространстве. Разложим сигнал по масштабам, используя производную от вейвлета Морле в качестве анализирующего вейвлета. Диапазон масштабов зададим от 0.1 до 0.006, за пределами которого сигнал практически отсутствует. Затем для каждого масштаба вычислим свертку полученных вейвлет-коэффициентов с вейвлетом Морле и проинтегрируем по масштабам от $a_{max} = 0.1$ до a_{min} . Варьируя a_{min} , найдем соответствующие значения σ . Зависимость σ от a_{min} (переведенного в частотный аналог по формуле $\nu = 1/(2a_{min})$) представлена на Рис. 2. Оптимальное значение $\nu = 35$ для первого примера и 7 - для второго примера. Минимальное значение σ - в Таблице 1. Анализ вейвлет-образа квазигармонического сигнала (Рис.1, слева) показывает, что существенная часть информации сосредоточена в трех компактных областях, расположенных вдоль наклонной прямой. Это дает возможность задать минимальный масштаб в виде функции $a_{min} = (10*x+c)^{-1}$. Тогда перебор значений c дополнительно минимизирует σ . В этом случае для значения $c = 42$ получается результат $\sigma = 0.12$, что заметно лучше, чем результат, полученный с использованием преобразования Фурье. Для кусочно-гладкого сигнала (Пример 2) дополнительная оптимизация не проводилась, так как его вейвлет-образ (Рис.1, справа) существенно искажен влиянием шума.

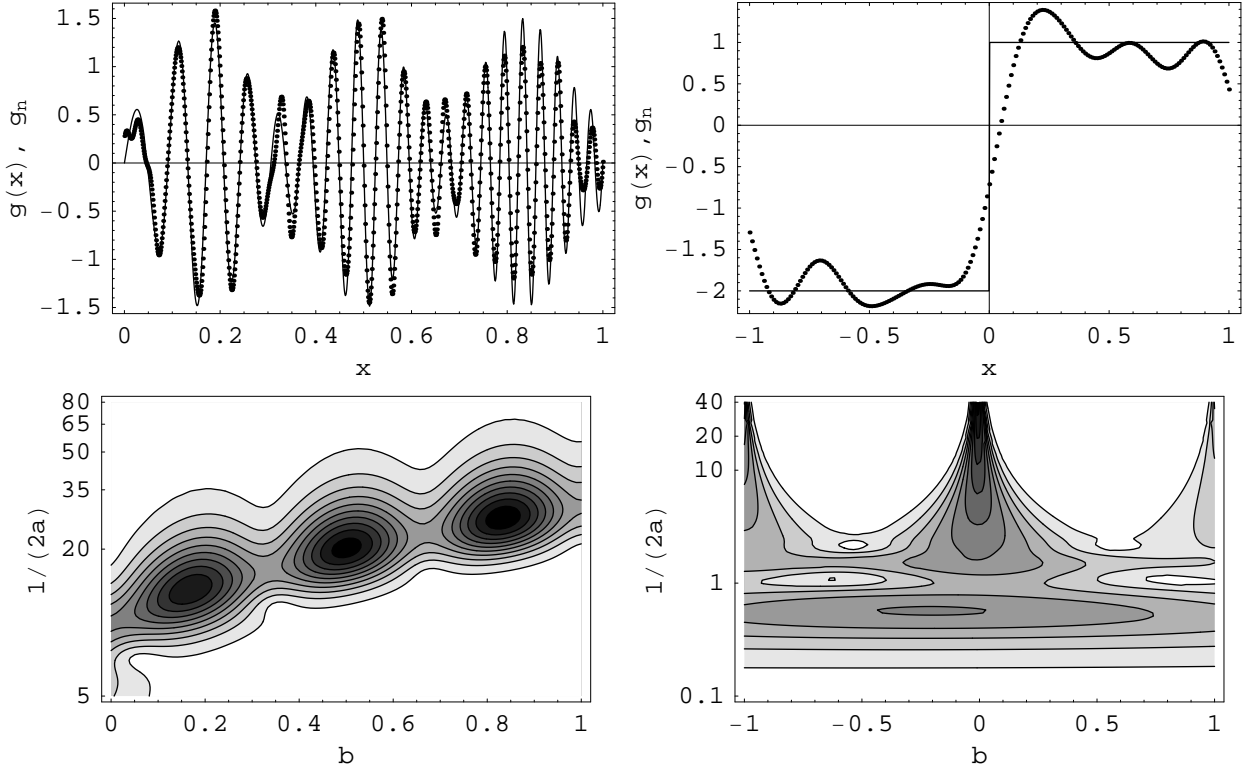


Рис. 3: Производные модельных сигналов, вычисленные аналитические - линии; численная оценка с использованием вейвлета Морле при оптимальном значении a_{min} - точки (вверху). Вейвлет-образы производных модельных сигналов (внизу).

На Рис.3 представлены графики аналитических производных модельных сигналов и результаты численного дифференцирования методом на основе вейвлета Морле при оптимальном значении a_{min} (без использования дополнительной оптимизации). Вейвлет-образы производных сигналов, приведенные на Рис. 3,внизу, показывают распределения спектральных свойств в заданных интервалах.

5 Обсуждение

Алгоритм с использованием вейвлет-преобразования позволяет проводить устойчивое дифференцирование в условиях шума. Локальность базисных функций позволяет более точно учитывать свойства сигнала по сравнению с методами фильтрации в частотном пространстве.

Особый интерес предложенные методы могут представлять при решении обратных задач (в медицине, астрономии, гидродинамике и т.д.). Например, интегральное уравнение Абеля, к которому сводится задача осесимметричной томографии, имеет решение [12]

$$g(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 - r^2}} \frac{\partial f(p)}{\partial p}, \quad (23)$$

где $f(p)$ - измеренные с некоторой погрешностью проекционные данные.

В общем случае решение двумерной задачи томографии сводится к обратному преобразованию Радона, которое также может быть выражено через первую производную измеренного сигнала [2]

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{p - x \sin \phi + y \cos \phi} \frac{\partial f(p, \phi)}{\partial p}, \quad (24)$$

где $f(p, \phi)$ - измеренные с некоторой погрешностью проекционные данные.

В работе [14] приведен ряд примеров, показывающих, что метод позволяет эффективно подавить шумы, возникающие в спектре из-за пробелов, и повысить точность восстановления спектра исходного сигнала. Этот алгоритм легко переносится и на рассматриваемую задачу о вычислении производной и состоит в этом случае в следующем. На первом шаге с помощью метода "дырявых" вейвлетов вычисляется вейвлет-образ $W_{a,b}$ исходной функции $\tilde{f}(x)$, а на втором шаге - по формуле (14) восстанавливается искомая производная $g(x) = f'(x)$. При этом на втором шаге используются *полные* вейвлет-функции $\chi(x)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ-ННИО № 03-02-04031, РФФИ № 03-02-16384 и Научно-образовательного центра (грант РЕ-009-0). РС также благодарен Уральскому отделению РАН (грант молодым ученым).

Список литературы

- [1] *Тихонов А., Арсенин В.* Методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1986.
- [2] *Пикалов В.В., Мельникова Т.С.* Томография плазмы. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995.
- [3] *Троицкий И.Н.* Статистическая теория томографии. М.:Радио и связь, 1989.
- [4] *Holschneider M.* Wavelets: Tool of analysis. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [5] *Патрикеев И.А., Фрик П.Г.* Вейвлет-томография в условиях шума // Математическое моделирование систем и процессов, Вып.5. Пермь: Из-во ПГТУ, 1997. 86-92.
- [6] *Patrickeyev I., Frick P.* Lymphocyte nucleus reconstruction via wavelet tomography // Journal of Biomedical Optics. 1999. N 7. 376-380.
- [7] *Степанов Р.А.* Двумерная вейвлет-томография галактических полей // Математическое моделирование систем и процессов. Вып.7. Пермь: Из-во ПГТУ, 1999. 86-91.
- [8] *Stepanov R., Frick P., Shukurov A., Sokoloff D.* Wavelet-tomography of the Galactic magnetic field. I.The method // Astronomy and astrophysics. 2002. 391. 361-368.
- [9] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.:Наука, 1959.
- [10] *Bracewell R.* Fourier Transform and Its Application. McGraw-Hill, Inc., 1965.
- [11] *Хемминг Р.* Цифровые фильтры. М.: Советское радио, 1980.
- [12] *Levin G.G.*(Ed.) Analytical Methods for Optical Tomography, SPIE, 1992.
- [13] *Frick P., Baliunas S., Galyagin D., Sokoloff D., Soon W.* Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations // Astrophysical Journal. 1997. 483. 426-434.
- [14] *Frick P., Grossmann A., Tchamichian Ph.* Wavelet analysis of signals with gaps // Journal of Mathematical Physics. 1998. 39. N 8. 4091-4107.