

SINGOLARITÀ COSMOLOGICHE

Giampiero Esposito

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli, Mostra d'Oltremare, Padiglione 20, 80125 Napoli.

Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Scienze Fisiche, Mostra d'Oltremare, Padiglione 19, 80125 Napoli.

Le conoscenze umane sul piano scientifico hanno sempre proceduto, gradualmente, mosse dalla curiosità e dall'ansia di comprendere le ragioni ultime delle leggi fisiche e matematiche che regolano l'evoluzione dei fenomeni naturali. La meccanica newtoniana condusse, in particolare, a degli sviluppi di eccezionale portata in meccanica celeste, e le menti più brillanti dei secoli passati elaborarono degli schemi di calcolo e dei teoremi matematici per analizzare in dettaglio il moto dei corpi celesti. A partire da una legge di forza la cui formulazione era semplice, la mente umana si è avventurata, in un'epoca in cui non erano disponibili i moderni strumenti di calcolo, nello studio del problema dei 3 corpi, delle maree, del moto della luna, nel calcolo delle orbite dei pianeti. I moderni sviluppi, come ad esempio il satellite al guinzaglio (e qui ricordiamo il contributo del compianto Professor Giuseppe Colombo) e le missioni spaziali, sono la continuazione di quegli sforzi che hanno tenuto impegnati fisici e matematici da Galileo sino ai giorni nostri.

In altri rami della fisica, fu una grande conquista l'unificazione dei fenomeni elettrici e magnetici attraverso l'introduzione del concetto di campo elettromagnetico. Le corrispondenti equazioni, che portano il nome di James Clerk Maxwell, descrivono una vasta messe di dati e fenomeni, e hanno ricevuto ampia conferma dagli esperimenti. D'altronde, fu proprio da un profondo riesame critico delle leggi della meccanica, dell'elettromagnetismo, e dei principi di invarianza, che prese le

Singolarità Cosmologiche

mosse, all'inizio di questo secolo, la teoria della relatività di Albert Einstein. I contributi di Poincaré, Einstein, Ricci-Curbastro, Levi-Civita e Marcel Grossmann portarono ad una profonda revisione del modo in cui i fenomeni gravitazionali venivano compresi e descritti. La gravitazione è una delle 4 interazioni fondamentali oggi note. La sua caratteristica peculiare è di essere sempre attrattiva, ed è la principale responsabile della struttura su larga scala dell'universo in cui viviamo. Grazie agli studiosi prima menzionati, divenne chiaro che tutti i fenomeni gravitazionali sono intimamente correlati a proprietà geometriche, le quali traducono in maniera chiara e semplice le richieste di invarianza che animano le moderne teorie fisiche. I fenomeni gravitazionali sono regolati da equazioni matematiche le quali, pur se tecnicamente complicate, possono essere risolte in casi fisicamente rilevanti. Qui interviene, però, un fatto nuovo. Prima della teoria di Einstein della gravitazione, la situazione familiare in fisica era che le equazioni matematiche del problema, assieme ad opportune condizioni supplementari (e.g. il comportamento all'infinito, o agli estremi di un intervallo, o su superfici di contorno) determinava completamente e univocamente l'oggetto di indagine del fisico teorico. In altri termini, le leggi della fisica erano sempre valide, ed esse bastavano a determinare l'evoluzione di tutti i fenomeni osservabili. Tuttavia, a metà degli anni sessanta (circa mezzo secolo dopo che Einstein ebbe completato la sua teoria della "relatività generale") cominciò a diventare chiaro che la teoria di Einstein prevede, in modo alquanto generico, che una "singolarità cosmologica" deve essere esistita. Questo è un concetto cruciale al quale è dedicato il resto della nostra relazione.

Anzitutto, una mente curiosa e educata a esercitare il suo spirito critico vorrebbe comprendere "cosa sia" una singolarità cosmologica, prima ancora di lanciarsi in ardite analisi matematiche per dimostrare la sua assenza o la sua presenza in cosmologia. A onor del vero, il concetto era di così difficile comprensione che anche gli studiosi che diedero i maggiori contributi a questo campo di ricerche (in ordine cronologico: Penrose, poi Hawking, poi Geroch) ebbero non poche difficoltà a formulare in maniera precisa una definizione che catturasse tutte le patologie di interesse fisico. L'esperienza con problemi più semplici suggerisce di riguardare

Singolarità Cosmologiche

come “singolare” una situazione in cui una o più grandezze di interesse fisico diventano infinite. Per le interazioni gravitazionali, si potrebbe allora pensare a punti di densità infinita, che, se presenti nel problema dell’origine dell’universo, corrisponderebbero ad una origine del tempo, a partire da uno stato di densità infinita nel quale non sarebbe stato possibile imporre la validità di alcuna delle leggi fisiche a noi note. I risultati matematici di Penrose, Hawking e Geroch considerarono invero un approccio più elegante e profondo. L’idea alla base della definizione di singolarità da loro usata era la seguente. Nella teoria di Einstein della gravitazione, gli osservatori in moto libero si muovono lungo una particolare famiglia di curve, le *geodetiche di tipo tempo*. Inoltre, le “storie” di particelle con massa a riposo nulla sono rappresentate da un’altra classe di curve, le *geodetiche di tipo luce*. L’espressione matematica di tali curve involve un parametro, il *parametro affine*, e la possibilità di estendere tali curve a valori arbitrari di tale parametro corrisponde al caso in cui gli osservatori in moto libero o le particelle esistono per sempre. Diversamente, si dovrebbe ammettere che tali osservatori o particelle esistono solo per un intervallo temporale finito, per poi sparire misteriosamente alla nostra vista. Questo evento “drammatico” appare ancora più patologico del caso in cui l’intensità della interazione gravitazionale dovesse diventare infinita.

Pertanto, si propose di considerare *condizioni minimali* per la assenza di singolarità (cosmologiche) le proprietà di completezza geodetica di tipo tempo e luce. In altri termini, la teoria di Einstein unifica spazio e tempo in un continuo a 4 dimensioni. Questo ente unificato prende il nome di *varietà spazio-tempo*. Per definizione, lo spazio-tempo, che è l’oggetto ove si svolgono tutti gli eventi fisici, esibisce completezza geodetica di tipo tempo e luce se tutte le curve geodetiche di tipo tempo e luce possono essere estese a valori arbitrari del loro parametro affine. Un tale modello di spazio-tempo viene detto *libero da singolarità*. Se tale proprietà non vale, si dice invece che lo spazio-tempo è singolare, e dunque in esso devono verificarsi eventi patologici altamente non banali, quali ad esempio il caso di osservatori in moto libero la cui “storia” non esiste dopo, o prima, di un intervallo finito di tempo (il “tempo proprio”). La formulazione matematica precisa di tale

Singolarità Cosmologiche

idea esula dagli scopi della nostra relazione, ma dobbiamo avvertire il lettore che questa idea, pur se provatasi utile nei tardi anni sessanta nel dimostrare i teoremi sulle singolarità, era essa stessa criticabile e migliorabile. Al di là delle generalizzazioni e dei raffinamenti tecnici, restava poco chiaro se le singolarità predette dai teoremi di Hawking e Penrose fossero riconducibili unicamente a casi in cui l'intensità del campo gravitazionale diventa infinita.

Cerchiamo, intanto, di cominciare a mettere ordine fra le tante idee e problemi che stiamo presentando. Le condizioni sotto le quali i teoremi di Hawking e Penrose sulle singolarità vengono dimostrati sono essenzialmente le seguenti:

- (i) La gravitazione è attrattiva (questa, ricordiamo, è una proprietà sempre valida delle interazioni gravitazionali);
- (ii) C'è abbastanza materia in qualche regione da impedire a qualunque cosa di scappare da quella regione;
- (iii) Non vi dovrebbero essere violazioni di causalità (ad esempio, viaggi indietro nel tempo, sino a influenzare la vita dei nostri genitori).

È un fatto degno di nota che la teoria di Einstein, di per se stessa, *non* nega a priori la possibilità che qualche violazione di causalità, che sembrerebbe strana per il “buon senso” comune, possa invece verificarsi. Nella formulazione di teorie fisiche, la richiesta (iii) è dunque un ingrediente che va eventualmente *aggiunto* dal fisico teorico. Tuttavia, un teorema sulle singolarità, dovuto a Hawking, vale indipendentemente da qualunque ipotesi fatta sulla causalità o sue possibili violazioni.

La scoperta teorica che le singolarità cosmologiche devono presentarsi in modo generico, *se* vale la teoria di Einstein della gravitazione, fu particolarmente sconvolgente, in quanto si era a lungo pensato che tali singolarità fossero legate all'alto grado di simmetria che alcune soluzioni particolari delle equazioni di Einstein (e.g. i modelli di Friedmann, Lemaitre, Robertson e Walker) presentano. In questa

Singolarità Cosmologiche

direzione si erano mossi gli studiosi sovietici Lifshitz e Khalatnikov, ma successivamente questi stessi autori, in collaborazione con Belinsky, fecero un'analisi più approfondita, che avvalorava le eleganti analisi astratte di Penrose, Hawking e Geroch: le più generiche soluzioni conducono ancora a modelli spazio-temporali singolari. Sembra dunque chiaro, da quanto sin qui esposto, che le concezioni cosmologiche, e più in generale tutto l'apparato della fisica teorica faticosamente costruito da generazioni di studiosi, venivano a trovarsi di fronte ad una crisi senza precedenti. Infatti i teoremi prima ricordati, e i loro raffinamenti successivi, indicavano che, nell'ambito della teoria di Einstein dei fenomeni gravitazionali, le singolarità, riguardate come punti ove le equazioni di Einstein e le altre leggi fisiche note non sono più valide, sono proprietà del tutto generiche. In altri termini, la fisica ci presenterebbe, da un lato, un insieme di leggi matematiche chiare e ben definite, che prevedono con successo una gran messe di dati empirici, mentre poi ci indicherebbe che, in certi regimi estremi, questo insieme di regole e principi non è più valido, né è chiaro come sostituirlo con altre regole e altri principi.

Questa osservazione prepara il terreno per l'ultima parte della nostra relazione, che prende le mosse da un lavoro scientifico presentato da Hawking all'attenzione della Pontificia Accademia delle Scienze. Si era allora nel 1982, e lo studioso britannico, che reggeva e regge ancor oggi la celebre cattedra lucasiana che fu di Newton, era più che mai ossessionato dal problema delle singolarità e del loro ruolo in un possibile quadro della “teoria finale di ogni cosa” a cui aspira, forse con troppa ambizione, la fisica teorica dei nostri tempi. L'intervento di Hawking era centrato sul problema delle “condizioni al contorno per l'universo”, e su dove esse andrebbero imposte. Invero, scopo ultimo della fisica è di fornire un modello matematico dell'universo che concordi con le osservazioni fatte sinora e, inoltre, predica i risultati di future osservazioni. Risulta allora conveniente dividere in due parti le formulazioni degli attuali modelli teorici:

- (i) Un insieme di equazioni matematiche che governano le variabili della teoria;

Singolarità Cosmologiche

(ii) Un insieme di “condizioni al contorno” per le soluzioni di tali equazioni. Tali condizioni specificano, come anticipato all’inizio della nostra relazione, il comportamento delle variabili della teoria sulle superfici di contorno che si presentano in natura.

Questa separazione della fisica in equazioni matematiche con relative condizioni al contorno può apparire artificiosa, ma si è invero rivelata utile nel condurre ad un progresso delle conoscenze. Infatti, la situazione tipica è quella in cui le osservazioni ci consentono una conoscenza solo *locale* dell’universo. È molto più difficile costruire modelli teorici che rendano conto dell’universo nella sua interezza e senza alcun bisogno della specificazione di condizioni supplementari. Tuttavia, per avere una teoria soddisfacente dell’universo (ove mai possibile), resta allora il problema di specificare le condizioni al contorno in modo appropriato.

Man mano che ci si avvicina alla scala di energie caratteristica della possibile singolarità iniziale dell’universo, si devono considerare quegli ingredienti aggiuntivi delle teorie fisiche che rientrano nell’ambito della fisica quantistica. Qui interviene un ulteriore, profondo concetto. Il “collasso” della fisica implicato dalla singolarità cosmologica della teoria di Einstein viene oggi interpretato come una indicazione che non è la fisica a perdere di validità. Appare invece più plausibile che sia stata applicata la teoria di Einstein al di là del suo limite di validità naturale. Alle altissime energie in gioco nell’universo primordiale non si possono non considerare gli effetti della “meccanica quantistica”. Non esiste ancora accordo tra le varie “scuole” della fisica teorica contemporanea su come combinare in una sintesi superiore la visione di Einstein della gravitazione con i principi della meccanica quantistica. Tuttavia, la ricerca è ormai orientata verso un superamento della teoria di Einstein in senso stretto, cercando di formulare una teoria più profonda che si riduca a quella di Einstein quando le energie in gioco sono quelle della nostra esperienza quotidiana. Nel suo contributo del 1982, e negli anni a seguire, Hawking osservò che, a causa delle possibili “fluttuazioni” nella struttura dello spazio-tempo alle altissime energie, non è sufficiente imporre condizioni al contorno in corrispondenza della singolarità iniziale, anche se tali condizioni dovessero diventare ben

Singularità Cosmologiche

definite grazie alla fisica quantistica. Egli *propose* invece di descrivere l'universo in termini di un continuo a 4 dimensioni *senza alcuna superficie di contorno*. A questo modello matematico, che non è imposto, si badi bene, dalle leggi fisiche oggi note, corrisponderebbe un universo fisico che non ha origine né fine, privo di singolarità iniziale. In tale universo, le leggi fisiche determinerebbero la totalità degli eventi osservabili e predicibili, e non si avrebbe alcun collasso della fisica.

Questo scenario teorico, che, non ci stancheremo di ripeterlo, rappresenta solo uno dei possibili schemi matematici elaborati dalla mente umana, unito alle idee e ai risultati discussi in precedenza, solleva interrogativi profondi e irrisolti:

(i) Se, a livello classico, le singolarità cosmologiche sono una proprietà generica della teoria di Einstein della gravitazione, si può concludere che, a livello quantistico, le singolarità vengono eliminate in modo generico? O invece permangono anche a livello quantistico, salvo a seguire approcci lungo le linee di Hawking e della sua scuola?

(ii) Cosa ci insegnano le proprietà e i modelli matematici discussi sinora su quel che è alla base del cosmo e delle sue leggi?

(iii) L'universo di Hawking, senza superfici di bordo, traduce davvero l'idea di un cosmo senza origine né fine, in cui il tempo non ha mai avuto inizio?

(iv) Qual è il significato ultimo (se pure esiste) dei nostri sforzi per una migliore comprensione dei fenomeni naturali? Lo scopo ultimo dell'esistenza e della ricerca umana è forse il completamento di un processo di auto-conoscenza, in cui sviluppiamo gradualmente (lungo un arco di secoli, forse di millenni) la sensibilità per quelle strutture matematiche mediante le quali reinterpretare in modo limpido e chiaro le leggi che regolano l'universo e la sua evoluzione?

Questi interrogativi sembrano confermare che non esiste più una netta separazione tra il ruolo dello scienziato e quello del filosofo, e che entrambi, pur se mossi da punti di vista molto differenti, possono trovare un terreno comune. Mentre le nostre conoscenze progrediscono, mentre nuove equazioni ci schiudono le porte di

decenni di nuove ricerche affascinanti, cresce in tutti noi la curiosità e l'ansia di trovare risposte a tali domande. Ed è con questa curiosità infinita che le generazioni di studiosi presenti e future possono legittimamente aspirare ad arricchire la loro esistenza, nella speranza che questi sforzi incessanti ci aiutino a comprendere l'origine e il fine ultimo dell'universo e delle sue leggi.

Bibliografia

- [1] Beem J. K. , Ehrlich P. E. e Easley K. L. (1996) *Global Lorentzian Geometry* (New York: Dekker).
- [2] Belinsky V. A. , Khalatnikov I. M. e Lifshitz E. M. (1970) Oscillatory Approach to a Singular Point in Relativistic Cosmology, *Adv. in Phys.* **19**, 523–573.
- [3] Clarke C. J. S. (1975) Singularities in Globally Hyperbolic Space-Times, *Commun. Math. Phys.* **41**, 65–78.
- [4] Clarke C. J. S. (1976) Space-Time Singularities, *Commun. Math. Phys.* **49**, 17–23.
- [5] Clarke C. J. S. e Schmidt B. G. (1977) Singularities: The State of the Art, *Gen. Rel. Grav.* **8**, 129–137.
- [6] Clarke C. J. S. e Krolak A. (1985) Conditions for the Occurrence of Strong Curvature Singularities, *J. Geom. Phys.* **24**, 127–143.
- [7] Clarke C. J. S. (1993) *The Analysis of Space-Time Singularities*, Cambridge Lecture Notes in Physics, Vol. 1 (Cambridge: Cambridge University Press).
- [8] Esposito G. (1994) *Quantum Gravity, Quantum Cosmology and Lorentzian Geometries*, Springer Lecture Notes in Physics, New Series m: Monographs, Vol. m12 (Berlin: Springer-Verlag).
- [9] Geroch R. P. (1966) Singularities in Closed Universes, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 445–447.
- [10] Geroch R. P. (1968a) Local Characterization of Singularities in General Relativity, *J. Math. Phys.* **9**, 450–465.

- [11] Geroch R. P. (1968b) What is a Singularity in General Relativity? , *Ann. Phys.* **48**, 526–540.
- [12] Geroch R. P. (1970) Singularities, in *Relativity*, eds. S. Fickler, M. Carmeli e L. Witten (New York: Plenum Press) 259–291.
- [13] Halliwell J. J. (1991) Quantum Cosmology and the Creation of the Universe, *Scientific American*, December issue, 28–35.
- [14] Hawking S. W. (1966a) Singularities and the Geometry of Space-Time, *Adams Prize Essay* (St. John’s College, Cambridge).
- [15] Hawking S. W. (1966b) The Occurrence of Singularities in Cosmology, *Proc. Roy. Soc. London A* **294**, 511–521.
- [16] Hawking S. W. (1966c) The Occurrence of Singularities in Cosmology. II *Proc. Roy. Soc. London A* **295**, 490–493.
- [17] Hawking S. W. (1967) The Occurrence of Singularities in Cosmology. III. Causality and Singularities, *Proc. Roy. Soc. London A* **300**, 187–201.
- [18] Hawking S. W. e Penrose R. (1970) The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology, *Proc. Roy. Soc. London A* **314**, 529–548.
- [19] Hawking S. W. e Ellis G. F. R. (1973) *The Large-Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [20] Hawking S. W. (1982) The Boundary Conditions of the Universe, in *Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia* **48**, 563–574.
- [21] Hawking S. W. (1984) The Quantum State of the Universe, *Nucl. Phys.* **B 239**, 257–276.
- [22] Hawking S. W. e Penrose R. (1995) *The Nature of Space and Time* (Princeton: Princeton University Press).
- [23] Horowitz G. T. e Myers R. (1995) The Value of Singularities, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 915–919.
- [24] Kriele M. (1990a) A Generalization of the Singularity Theorem of Hawking and Penrose to Space-Times with Causality Violations, *Proc. Roy. Soc. London A* **431**, 451–464.

- [25] Kriele M. (1990b) Causality Violations and Singularities, *Gen. Rel. Grav.* **22**, 619–623.
- [26] Lifshitz E. M. e Khalatnikov I. M. (1963) Investigations in Relativistic Cosmology, *Adv. in Phys.* **12**, 185–249.
- [27] O’Neill B. (1983) *Semi-Riemannian Geometry* (New York: Academic).
- [28] Penrose R. (1965) Gravitational Collapse and Space-Time Singularities, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57–59.
- [29] Penrose R. (1979) Singularities and Time-Asymmetry, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, eds. S. W. Hawking e W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press) 581–638.
- [30] Penrose R. (1983) *Techniques of Differential Topology in Relativity* (Bristol: Society for Industrial and Applied Mathematics).